Tek Tür Modeli – Lojistik (Verhulst-Pearl) denklem

- Belçikalı matematikçi *Pierre F. Verhulst* 1838 yılında insan nüfusu için $a(P) = (r - sP)$ önerdi

$$\frac{dP}{dt} = (r - sP)P = rP(1 - \frac{P}{K}) \qquad (2)$$

$K = r/s$

- Model 1930 yılında *Pearl* tarafından meyve sineği nüfusuna ve 1935 de *G.F. Gause* tarafından hamam böceği nüfusuna uygulandı

Tek Tür Modeli – Lojistik (Verhulst-Pearl) denklem

- Belçikalı matematikçi *Pierre F. Verhulst* 1838 yılında insan nüfusu için $a(P) = (r - sP)$ önerdi

$$\frac{dP}{dt} = (r - sP)P = rP(1 - \frac{P}{K}) \qquad (2)$$

  $K = r/s$

- Model 1930 yılında *Pearl* tarafından meyve sineği nüfusuna ve 1935 de *G.F. Gause* tarafından hamam böceği nüfusuna uygulandı
- $r =$ *çevre etkisiz büyüme oranı*, $s =$ *nüfus yoğunluğu etkisi*

Tek Tür Modeli – Lojistik (Verhulst-Pearl) denklem

- Belçikalı matematikçi *Pierre F. Verhulst* 1838 yılında insan nüfusu için $a(P) = (r - sP)$ önerdi

$$\frac{dP}{dt} = (r - sP)P = rP(1 - \frac{P}{K}) \tag{2}$$

  $K = r/s$

- Model 1930 yılında *Pearl* tarafından meyve sineği nüfusuna ve 1935 de *G.F. Gause* tarafından hamam böceği nüfusuna uygulandı
- $r =$ *çevre etkisiz büyüme oranı,* $s =$ *nüfus yoğunluğu etkisi*
- Büyüme oranının sıfır olduğu nüfusa **denge nüfusu**

Tek Tür Modeli – Lojistik (Verhulst-Pearl) denklem

- Belçikalı matematikçi *Pierre F. Verhulst* 1838 yılında insan nüfusu için $a(P) = (r - sP)$ önerdi

$$\frac{dP}{dt} = (r - sP)P = rP(1 - \frac{P}{K}) \qquad (2)$$

$K = r/s$

- Model 1930 yılında *Pearl* tarafından meyve sineği nüfusuna ve 1935 de *G.F. Gause* tarafından hamam böceği nüfusuna uygulandı
- $r =$ *çevre etkisiz büyüme oranı*, $s =$ *nüfus yoğunluğu etkisi*
- Büyüme oranının sıfır olduğu nüfusa **denge nüfusu**
- Lojisitik denklem için bu, $P_e = 0$ (ki bu durum bizim için ilgi çekici değildir) veya $1 - P_e/K = 0$ yani $P_e = K = r/s$ durumu

Tek Tür Modeli – Lojistik (Verhulst-Pearl) denklem

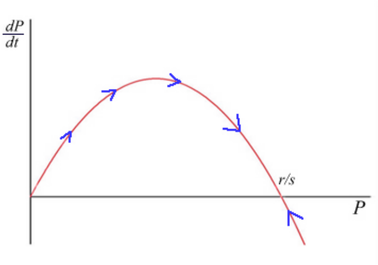
- Belçikalı matematikçi *Pierre F. Verhulst* 1838 yılında insan nüfusu için $a(P) = (r - sP)$ önerdi

$$\frac{dP}{dt} = (r - sP)P = rP(1 - \frac{P}{K}) \tag{2}$$

  $K = r/s$

- Model 1930 yılında *Pearl* tarafından meyve sineği nüfusuna ve 1935 de *G.F. Gause* tarafından hamam böceği nüfusuna uygulandı
- $r =$ *çevre etkisiz büyüme oranı*, $s =$ *nüfus yoğunluğu etkisi*
- Büyüme oranının sıfır olduğu nüfusa **denge nüfusu**
- Lojisitik denklem için bu, $P_e = 0$ (ki bu durum bizim için ilgi çekici değildir) veya $1 - P_e/K = 0$ yani $P_e = K = r/s$ durumu
- K **çevre taşıma kapasitesi** (*doygunluk düzeyi*)

$\frac{dP}{dt} = (r - sP)P$



Şekil: Lojistik denklemin faz düzlemi

Parabol kesim noktaları $P = 0$ ve $P = r/s$
$(0, r/s)$ de $dP/dt > 0$;($t \to 0$ için $P(t)$ artarak r/s ye yaklaşır)
$(r/s, \infty)$ da $dP/dt < 0$ ($t \to 0$ için $P(t)$ azalarak r/s ye yaklaşır)

Theorem

$P_e = K = r/s$ *denge nüfusu kararlıdır.*

Fact (Yöntem 1)

Kararlılık Teoreminden $f'(P) = \dfrac{d}{dP}\left[(r - sP)P\right] = r - 2sP$ *olup,* $f'(P)|_{P=r/s} = -r < 0$ *olduğundan* $P_e = K = r/s$ *denge noktası (asimptotik) kararlıdır.*

Fact (Yöntem 2)

Faz düzlem eğrisine denge nüfusunun komşuluğunda

$$\frac{dP}{dt} = m(P - \frac{r}{s})$$

doğrusu ile yaklaşalım. Burada m *eğimi* $P = r/s$ *noktasında negatiftir. Bu lineer diferensiyel denklemin çözümü*

$$e^{-mt}P(t) = \frac{r}{s}e^{-m\tau} + C$$

ve $P(0) = P_0$ $(r/s$ *ye yakın)* *için*

$$P(t) = \frac{r}{s} + (P_0 - \frac{r}{s})e^{mt}$$

olur. $m < 0$ *olduğundan,* $t \to \infty$ *için* $P \to r/s$ *dir. Görüldüğü gibi* P *asla sonlu zamanda* r/s *ye ulaşamaz. Ayrıca* P_0 *başlangıç koşulu denge noktasına yakın olduğu için dengeden sapma sıfıra yaklaşır. Bu ise denge nüfusunun kararlı olması demektir.*

Fact (Yöntem 3)

(Pertürbasyon yöntemi)

$$P = \frac{r}{s} + \varepsilon P_1 \;\; (\varepsilon P_1 \; \textit{dengeden sapma})$$

diyelim. $|\varepsilon P_1| \ll r/s$ *(Yani* $\lim_{t\to\infty} \frac{\varepsilon P_1}{r/s} = 0$*) dir. Lojistik denklemden*

$$\varepsilon \frac{dP_1}{dt} = \left(\frac{r}{s} + \varepsilon P_1\right)(r - r - \varepsilon s P_1)$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -sP_1\left(\frac{r}{s} + \varepsilon P_1\right)$$

εP_1 *çok küçük olduğundan, lineer olmayan terimi iptal edebiliriz. Böylece,*

$$\frac{dP_1}{dt} = -rP_1 \Longrightarrow P_1(t) = Ce^{-rt} \to 0 \quad (t \to \infty)$$

olup bu denge nüfusunun kararlı olması demektir.

Şimdi lojistik denklemi $P(0) = P_0$ başlangıç koşulu altında çözelim.

$$\frac{dP}{P(r-sP)} = dt \implies \frac{1}{r}\left(\frac{1}{P} - \frac{s}{r-sP}\right)dP = dt$$

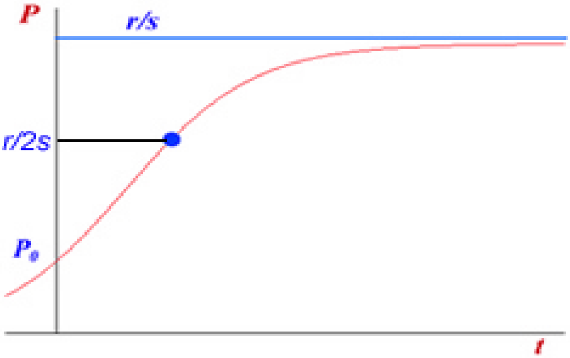
$$\frac{1}{r}(\ln|P| - \ln|r-sP|) = t + c \implies \frac{1}{r}\ln\left|\frac{P}{r-sP}\right| = t + c$$

$P(0) = P_0$ başlangıç koşulunu kullanırsak,

$$\frac{P}{P_0}\left|\frac{r-sP_0}{r-sP}\right| = e^{rt}$$

$\lim_{t\to\infty} r - sP = 0$ olduğundan, $(r-sP_0)/(r-sP)$ oranının işareti pozitif olduğundan $\frac{P}{P_0}\left(\frac{r-sP_0}{r-sP}\right) = e^{rt}$ veya düzenlenirse

$$P = \frac{P_0 re^{rt}}{(r - sP_0 + sP_0e^{rt})} \implies P = \frac{r/s}{1 + \dfrac{r-sP_0}{sP_0e^{rt}}} \to \frac{r}{s} \quad (t\to\infty)$$



Şekil: Lojistik eğri. $\left(\frac{1}{r}\ln\frac{r-sP_0}{sP_0}, \frac{r}{2s}\right)$ dönüm noktası

Bir kültürdeki mayanın büyümesi lojistik eğriye oldukça uymaktadır. Lojistik model üç sabit içerir. r, s ve P_0. Modeli test etmek için üç bilinen koşula gereksinim vardır. Örneğin, üç farklı zamanda $P(t_0) = P_0$, $P(t_1) = P_1$, $P(t_2) = P_2$ değerleri verilebilir.

Tek Tür Modeli – Allee etkisi

- Warder C. Allee (1931): Hayvanların sürü halinde yaşamaları ve sosyal davranışları:
- Düşük nüfus boyutlarında veya yoğunluklarında nüfus büyümesinde azalma olur. Düşük yoğunluklu nüfuslarda, nüfus geniş alanlara yayılır ki bu da çiftleşmelerin dolayısı ile nüfusun azalmasına neden olur. Buna **Allee etkisi** denir. Nüfus modellerinde Allee etkisi sıklıkla, altındaki nüfusların yokolduğu bir eşik değer olarak modellenmektedir.
- İkinci dereceden polinom tipli bir büyüme oranı

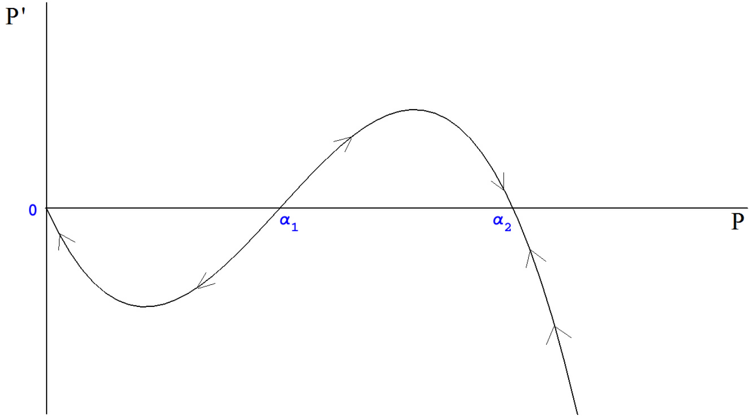
$$\frac{dP}{dt} = (a_1 + a_2 P + a_3 P^2)P = f(P)P \tag{3}$$

Burada $a_1 < 0$, $a_2 > 0$ ve $a_3 < 0$ dır. Büyüme katsayısı

$$\begin{aligned} a(P) &= a_1 + a_2 P + a_3 P^2 \\ &= a_3(P - \alpha_1)(P - \alpha_2), \qquad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 \end{aligned}$$

olacak şekilde bir pozitif maksimum büyüme oranı mevcuttur. Üç denge noktası $P_e = 0$, α_1, α_2 dir.

dP/dt yi P nin fonksiyonu olarak çizersek P eksenini 0 ve α_1 ve α_2 de kesen bir kübik eğri elde ederiz. Oklar çözümün zamanla nasıl değiştiğini göstermektedir



$$\frac{df(P)}{dP} = a_3 \frac{d}{dt}\left[(P-\alpha_1)(P-\alpha_2)P\right]$$

$$= a_3\left[(P-\alpha_1)(P-\alpha_2) + (P-\alpha_1)P + (P-\alpha_2)P\right]$$

olup, $\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{P=0} = a_3\alpha_1\alpha_2 < 0$ ve $\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{P=\alpha_2} = a_3(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_2 < 0$ olduğundan $P_e = 0$ ve α_2 denge noktaları (asimptotik) **kararlıdır**. $\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{P=\alpha_2} = a_3(\alpha_1-\alpha_2)\alpha_1 > 0$ olduğundan $P_e = \alpha_1$ denge noktası **kararsızdır**.

PROJE 1: HÜCRE BÜYÜMESİ

Eğer, büyüme sırasında hücrenin şekil ve yoğunluğu değişmiyorsa, hücre büyümesinin ilk evrelerinde, hücrenin $w(t)$ ağırlığına bağlı bir model geliştirebiliriz:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= (c - aw)\, w^{2/3} \\ &= c(1 - w/K)w^{2/3}, \quad (K = \frac{c}{a}) \end{aligned}$$

PROJE 2: ÜRÜN TOPLAMA

Bir balık çiftliğiniz olduğunu varsayalım. Balıkların

$$\frac{dP}{dt} = (r - sP)P$$

lojistik modeline göre ürediğini varsayalım. Eğer çiftlikten yıllık H adet yetişkin balık alıyorsanız bu durumda modeli

$$\frac{dP}{dt} = (r - sP)P - H$$

şeklinde yenileyebiliriz. Bu modelleri analiz ediniz.