İki Tür Modeli

P_1 ve P_2 nüfuslu, iki türden oluşan küçük bir ekosistem göz önüne alalım. Her bir türün değişim oranının sadece türlerin nüfusuna bağımlı olduğunu kabul edelim. O halde, matematiksel modelimiz

$$\frac{dP_1}{dt} = g(P_1, P_2) \tag{1}$$

$$\frac{dP_2}{dt} = f(P_1, P_2) \tag{2}$$

şeklindedir.

Genel olarak bir türün etkisi, diğer türün nüfusunu artırmak veya azaltmak şeklindedir. Böylece iki tür arasında üç tip etkileşim oluşur.

- $+-$ $(-+)$ **av-avcı**; Bir tür diğerinin nüfusunu azaltıyor.
- $++$ **(ortaklık)**; Her iki tür birbirinin nüfusunu artırıyor.
- $--$ **(yarışma)**;Her iki tür de aynı yiyecek kaynağını kullanıyor.

İki tür için verilen (1)-(2) modelinde, eğer hiç bir türün dış göçü yoksa bu durumda

$$g(0, P_2) = 0 \text{ ve } f(P_1, 0) = 0$$

olur. (1)-(2) sisteminin faz düzlem denklemi,

$$\frac{dP_2}{dP_1} = \frac{f(P_1, P_2)}{g(P_1, P_2)} \tag{3}$$

iki-nüfus ekosisteminin *fazları* olarak adlandırılır. Bu denklemin çözümü nüfusların *yörüngelerini* verir.

$g(P_1, P_2)$ ve $f(P_1, P_2)$ zamana açık olarak bağlı olmadıklarından, verilen model *otonomdur*. Nüfusların etkileşimini çalışmak için ya (1)-(2) sistemini ya da (3) denklemini analiz etmek gerekir. Çoğu zaman her ikisinin de açık bir çözümünü bulmak mümkün değildir.

İki Tür Modeli - Kararlılık

Denge nüfusu-her iki nüfusun da zamanla değişmediği nüfus.
(doğum sayısı=ölüm sayısı)
(P_{1e}, P_{2e}) bir denge nüfusu ise

$$f(P_{1e}, P_{2e}) = 0 \tag{4}$$
$$g(P_{1e}, P_{2e}) = 0 \tag{5}$$

demektir. Denge durumunda, dP_2/dP_1 belirsizdir. Böylece, (P_{1e}, P_{2e}) noktası faz düzlem denkleminin bir **aykırı** (tekil) noktasıdır.

- Denge noktası (nüfusu) **kararlı** mıdır?
- Eğer her iki nüfus da denge nüfuslarına yakın ise, zaman içinde ne olur?

Kararlılık analizi: $0 < |\varepsilon| \ll 1$ için

$$\begin{aligned} P_1(t) &= P_{1e} + \varepsilon P_{11}(t) \\ P_2(t) &= P_{2e} + \varepsilon P_{21}(t) \end{aligned}$$

yi (1)-(2) sisteminde yerlerine yazıp, Taylor açılımında e^2 li terimleri atarsak

$$\frac{dP_{11}(t)}{dt} = \frac{\partial g(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_1} P_{11}(t) + \frac{\partial g(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_2} P_{21}(t) \tag{6}$$

$$\frac{dP_{21}(t)}{dt} = \frac{\partial f(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_1} P_{11}(t) + \frac{\partial f(P_{1e}, P_{2e})}{\partial P_2} P_{21}(t) \tag{7}$$

(6)-(7) sistemi birinci basamaktan bir lineer denklem sistemidir ve çözümü denge noktası komşuluğunda türlerin davranışını verir. Bu denklem sistemini matris formunda

$$\frac{dP}{dt} = JP$$

şeklinde de yazabiliriz. Burada J

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(P_{1e},P_{2e})}{\partial P_1} & \frac{\partial g(P_{1e},P_{2e})}{\partial P_2} \\ \\ \frac{\partial f(P_{1e},P_{2e})}{\partial P_1} & \frac{\partial f(P_{1e},P_{2e})}{\partial P_2} \end{bmatrix}$$

olup, sistemin Jakobiyen matrisidir.

Sistem (6)-(7) daha basit bir gösterimle

$$\frac{dx}{dt} = ax + by \tag{8}$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy \tag{9}$$

veya matris formda

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \frac{dX}{dt} = JX = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, a, b, c, d sabitler x ve y de denge noktasından sapma olarak alınabilir.

$c = 0$ ise (9) denklemi çözülebilir olup, çözümü

$$y(t) = k_1 e^{dt}, \quad (k_1 \text{ sabit})$$

ve

$$x(t) = \begin{cases} k_2 e^{at} + \dfrac{bk_1}{d-a} e^{dt}, & d \neq a \\ k_2 e^{at} + k_1 bte^{at}, & d = a \end{cases} \qquad (k_2 \text{ sabit})$$

$c \neq 0$ ise, (9) denkleminde türev alarak,

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (a+d)\frac{dy}{dt} + (ad-bc)y = 0 \tag{10}$$

sabit katsayılı denklemi elde edilir ki *karakteristik denklemi*

$$r^2 - (a+d)r + (ad-bc) = 0$$

veya

$$r^2 - \mathrm{iz}(J)r + \det(J) = 0$$

olup, dikkat edilirse bu denklem $\dfrac{dX}{dt} = JX$ sisteminde J matrisinin karakteristik denklemidir. Kökleri ise

$$r_{1,2} = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

olup J nin özdeğerlerini verir.

Durum 1. r_1 ve r_2 reel ve $r_1 \neq r_2$.
(10) denkleminin genel çözümü

$$y(t) = k_3 e^{r_1 t} + k_4 e^{r_2 t}, \ (k_3, k_4 \text{ isteksel sabitler}) \tag{11}$$

olup, (9) eşitliğinden,

$$x(t) = \frac{k_3(r_1 - d)}{c} e^{r_1 t} + \frac{k_4(r_2 - d)}{c} e^{r_2 t} \tag{12}$$

elde edilir. O halde (11) ve (12), $t \to \infty$ için

$$(x(t), y(t)) \longrightarrow \begin{cases} (0,0), & (r_1, r_2 < 0) \\ xy\text{–de bir nokta}, & (\text{bir kök} < 0, \ \text{diğer kök} = 0) \end{cases}$$

verir.

Durum 2. $r_1 = r_2$.

$$y(t) = k_3 e^{r_1 t} + k_4 t e^{r_1 t}, \ (k_3, k_4 \text{ isteksel sabitler}) \tag{13}$$

$$x(t) = \frac{k_3(r_1 - d)}{c} e^{r_1 t} + \frac{k_4(1 + r_1 t - dt)}{c} e^{r_1 t} \tag{14}$$

elde edilir. Böylece, $t \longrightarrow \infty$ için

$$(x(t), y(t)) \longrightarrow \begin{cases} (0,0), & (r_1 < 0) \\ \infty \text{ da bir nokta}, & (r_1 = 0) \end{cases}$$

olur.

Durum 3. Kompleks eşlenik kökler: $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$.

$$y(t) = k_3 e^{\alpha t} \cos \beta t + k_4 e^{\alpha t} \sin \beta t \tag{15}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{k_3 e^{\alpha t}}{c} (\alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t - d \cos \beta t) \\ &+ \frac{k_4 e^{\alpha t}}{c} (\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t - d \sin \beta t) \end{aligned} \tag{16}$$

bulunur. $t \to \infty$ için

$$(x(t), y(t)) \longrightarrow (0, 0), \quad (\alpha < 0)$$

elde edilir.

Yukarıdaki durumları göz önüne alarak aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

Bir denge çözümü,

(i) **kararlıdır** eğer her iki kökün reel kısımları negatif ise,

(ii) **etkisiz kararlıdır** (yani çözüm $t \longrightarrow \infty$ için bir denge noktasına yaklaşmaz), eğer her iki kök sıfır değilse, ve bir kökün reel kısmı sıfır ve diğeri küçük veya eşit sıfır ise (Durum 1 ve 3),

(iii) **cebirsel kararsızdır** (yani çözüm t nin bir cebirsel kuvveti ile büyür) eğer her iki kök de sıfır ise (Durum 2, dengenin etkisiz kararlı olduğu $a = b = c = d = 0$ hariç),

(iv) **kararsızdır** eğer bir kökün reel kısmı pozitif ise.

Bu veriler ışığında aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz:

$$r = \frac{a + d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

ifadesinde $p = a + d$, $q = ad - bc$, $\triangle = p^2 - 4q$ olsun.

DURUM		KÖKLER	KARARLILIK
I. $\triangle > 0$		Reel ve farklı	
A.	$q > 0$	aynı işaret	
	(a) $p > 0$	her ikisi de $+$	Kararsız
	(b) $p < 0$	her ikisi de $-$	Kararlı
B.	$q = 0$	bir kök sıfır	
	(a) $p > 0$	diğer kök $+$	Kararsız
	(b) $p < 0$	diğer kök $-$	Etkisiz kararlı
C.	$q < 0$	zıt işaretler	Kararsız

II.	$\triangle = 0$		Reel ve eşit	
	A.	$p > 0$	her ikisi de $+$	Kararsız
	B.	$p = 0$		
		(**a**) en az bir $a, b, c, d \neq 0$	her ikisi de sıfır	Cebirsel kararsız
		(**b**) $a, b, c, d = 0$	her ikisi de sıfır	Etkisiz kararlı
	C.	$p < 0$	her ikisi de $-$	Kararlı
III.	$\triangle < 0$		Karmaşık eşlenik	
	A.	$p > 0$	reel kısım $+$	Kararsız
	B.	$p = 0$	reel kısım sıfır	Etkisiz kararlı
	C.	$p < 0$	reel kısım $-$	Kararlı

Eğer a, b, c, d ölçümlerinde küçük hatalar var ise ve bunlar p, q, $\triangle$ hesaplamalarında da küçük hatalar doğuruyorsa, bu durumda yukarıdaki durumlar değişimle karşı karşıya kalır. Ölçümlerdeki küçük hataların değişime yol açmadığı durumlara **temel durumlar** denir. Buna göre, I(A), I(C), III(A) ve III(C) durumları temel durumlardır. Diğer durumlar ise **sınır durumları** olarak adlandırılır. Eşit işareti içeren herhangi bir durum sınır durumudur.

Temel durumlarda lineer sistemin davranışı (en azından denge çözümü komşuluğunda) lineer olmayan sisteme duyarlı bir yaklaşımdır. Dahası, lineer olmayan bir sistem için bir sınır denge nüfusunun kararlılığı, onun lineerleştirilmişi ile aynıdır (III(B): $\triangle < 0$, $p = 0$ durumu hariç ki bu sınır durumu, kararlılık bölgesini kararsızlık bölgesinden ayırır). Tüm sınır durumları için faz düzlem analizi ile birlikte bu sınır durumunun kararlılığında; denge noktasının yakın komşuluğunda duyarlı bir yaklaşım elde etmek için lineerleştirme işleminde göz ardı edilen bazı lineer olmayan terimler gerekli olabilir. Bunun için genellikle Taylor serisindeki ikinci derece terimleri eklemek yeterlidir.