İki Tür Modeli – Faz Düzlemi

(8)-(9) sisteminin faz düzlem denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} \tag{17}$$

olup, zamana açık olarak bağlı değildir. Bir *yörünge* boyunca nüfusun nasıl değiştiğini belirlemek için, zamana bağlı denklemde değişim yönünü gösteren ok işaretleri kullanacağız. Faz düzlem denklemi kendi başına kararlılığı veya kararsızlığı belirleyemez. t zamanını $-t$ ile değiştirmek bir kararlı denge noktasını kararsız bir denge noktasına dönüştürebilir fakat faz düzlem denklemi aynı kalır. Örneğin çözümdeki e^{-t} tipi bir terim e^{t} ye dönüşür fakat faz düzlem denklemi değişmez. Kararlılığın belirlenmesinde zamana bağlı denklemin kullanılması zorunluluğunu göstermek için aşağıdaki örnek yeterli olacaktır.

Example

Aşağıdaki iki sistemi göz önüne alalım.

$$\left\{ \frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y \ ; \qquad x(0) = x_0, \ y(0) = y_0 \right\} \tag{18}$$

$$\left\{ \frac{dx}{dt} = -2x, \quad \frac{dy}{dt} = -2y \ ; \qquad x(0) = x_0, \ y(0) = y_0 \right\}. \tag{19}$$

İlk sistemin çözümü $\{x = x_0 e^t, \ y = y_0 e^t\}$, ve ikinci sistemin çözümü ise $\{x = x_0 e^{-2t}, \ y = y_0 e^{-2t}\}$ dir. Böylece (18) sistemi kararsız, ve (19) sistemi kararlıdır. Fakat her iki sistemin faz düzlem denklemleri aynı olup,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

dir.

Eğer a, b, c, d sabitlerinin hepsinin birden işaretlerini değiştirirsek, faz düzlem denklemi değişmez kalır. $p = a + d$, $q = ad - bc$ ve $\triangle = p^2 - 4q$ olduğundan, bu durumda sadece p nin işareti değişir. Böylece, eğer faz düzlem denklemini göz önüne alırsak, $p > 0$ ve $p < 0$ durumlarını ayrı ayrı incelemek gerekmez. Ters doğrultudaki hareketi gösteren oklar kullanmak yeterli olur. Şimdi aşağıdaki temel durumları göz önüne alalım:

I(A) : $\triangle > 0$, $q > 0$; I(C) : $\triangle > 0$, $q < 0$; III(A) : $\triangle < 0$, $p > 0$; III(C) : $\triangle < 0$, $p < 0$. Yukarıdaki açıklamalara göre son iki durum $\triangle < 0$, $p \neq 0$ durumu olarak düşünülebilir.

I(A) : $\triangle > 0,\ q > 0$ durumu.

Kökler farklı ve reeldir. $p > 0$ iken kökler pozitiftir. $p < 0$ iken kökler negatiftir. Genelliği bozmaksızın $c \neq 0$ kabul edelim.

$$x(t) = \frac{k_3(r_1 - d)}{c} e^{r_1 t} + \frac{k_4(r_2 - d)}{c} e^{r_2 t} \tag{20}$$

$$y(t) = k_3 e^{r_1 t} + k_4 e^{r_2 t} \tag{21}$$

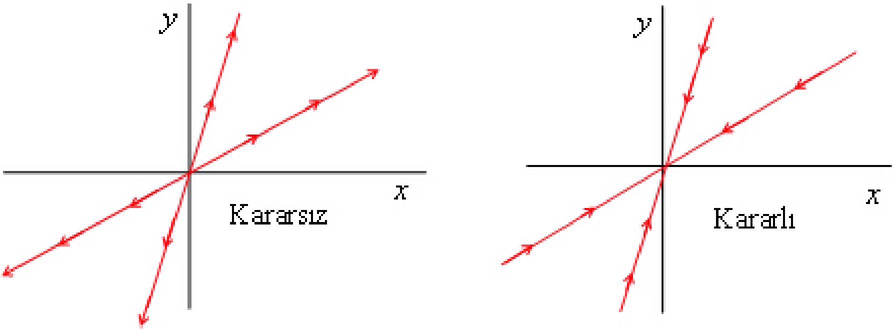
dir. $r_2 > r_1$ $(r_2 > r_1 > 0$ veya $0 > r_2 > r_1)$ olsun. Basit yörüngeler $k_3 = 0$ ise

$$\left.\begin{array}{c} x(t) = k_4 \dfrac{r_2 - d}{c} e^{r_2 t} \\ y(t) = k_4 e^{r_2 t} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{r_2 - d}{c} \tag{22}$$

$k_4 = 0$ ise,

$$\left.\begin{array}{c} x(t) = k_3 \dfrac{r_1 - d}{c} e^{r_1 t} \\ y(t) = k_3 e^{r_1 t} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{r_1 - d}{c} \tag{23}$$

olur.



Şekil: Her iki eğim de pozitif kabul edilmiştir.

Zamana bağlı çözümler göstermektedir ki bu yörüngeler ya orjinden uzaklaşmaktadır (kararsız durum, her iki kök de pozitif), ya da orjine doğru yaklaşmaktadır (kararlı durum, her iki kök de negatif).

Diğer yörüngeleri çizmek için $x(t)$ ve $y(t)$ nin $t \to \pm\infty$ iken asimptotik davranışını inceleyelim: $r_2 > r_1$ olduğundan

$$t \to \infty \text{ iken } \begin{cases} x \to k_4 \dfrac{r_2 - d}{c} e^{r_2 t} \to \begin{cases} \pm\infty \\ 0 \end{cases} \text{her iki kök } \begin{matrix} \text{pozitif} \\ \text{negatif} \end{matrix} \\ y \to k_4 e^{r_2 t} \to \begin{cases} \pm\infty \\ 0 \end{cases} \text{her iki kök } \begin{matrix} \text{pozitif} \\ \text{negatif} \end{matrix} \end{cases}$$

$$t \to -\infty \text{ iken } \begin{cases} x \to k_3 \dfrac{r_1 - d}{c} e^{r_1 t} \to \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \end{cases} \text{her iki kök } \begin{matrix} \text{pozitif} \\ \text{negatif} \end{matrix} \\ y \to k_3 e^{r_1 t} \to \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \end{cases} \text{her iki kök } \begin{matrix} \text{pozitif} \\ \text{negatif} \end{matrix} \end{cases}$$

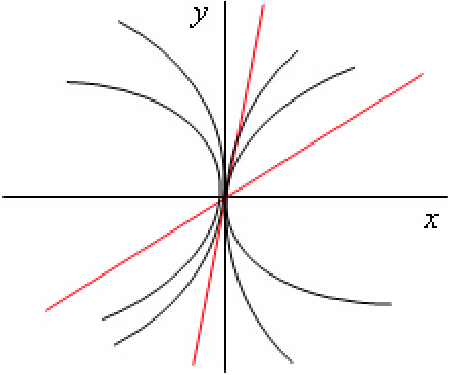
Böylece x ve y sonsuza giderken yörüngeler de

$$\frac{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{r_2 - d}{c} \\ \dfrac{r_1 - d}{c} \end{cases} \text{her iki kök } \begin{matrix} \text{pozitif} \\ \text{negatif} \end{matrix}$$

doğrusal yörüngelerinden birine paralel hareket ederler. Yörüngeler orjine yaklaşırken, doğrusal yörüngelere teğet olarak yaklaşırlar:

$$\frac{x}{y} \to \begin{cases} \dfrac{r_2 - d}{c} \\ \dfrac{r_1 - d}{c} \end{cases} \text{her iki kök } \begin{matrix} \text{negatif} \\ \text{pozitif} \end{matrix}$$

Bazı tipik yörüngeler Şekilde verilmiştir.



Şekil: Nod: Tipik yörüngeler.

Bu tür durumdaki denge noktasına, yörüngeler sıfıra gidiyorsa bir **kararlı nod**; yörüngeler sıfırdan uzaklaşıyorsa, bir **kararsız nod** denir.

I(C) : $\triangle > 0,\ q < 0$ durumu.

Kökler zıt işarettedir. $c \neq 0$ ise

$$x(t) = \frac{k_3(r_1 - d)}{c} e^{r_1 t} + \frac{k_4(r_2 - d)}{c} e^{r_2 t}$$

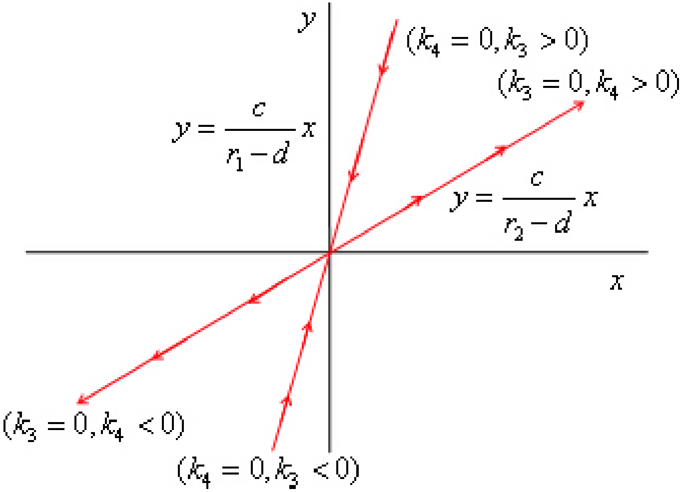
$$y(t) = k_3 e^{r_1 t} + k_4 e^{r_2 t}$$

$r_1 < 0 < r_2$ olsun. $k_3 = 0$ ise

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= k_4 \frac{r_2 - d}{c} e^{r_2 t} \\ y(t) &= k_4 e^{r_2 t} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{r_2 - d}{c}$$

$k_4 = 0$ için

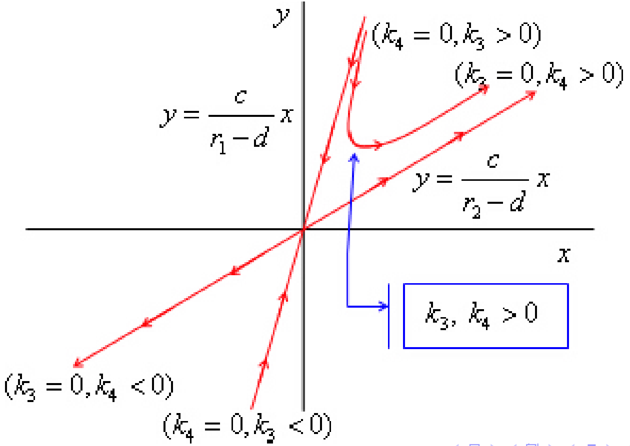
$$\left.\begin{aligned} x(t) &= k_3 \frac{r_1 - d}{c} e^{r_1 t} \\ y(t) &= k_3 e^{r_1 t} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{r_1 - d}{c}$$

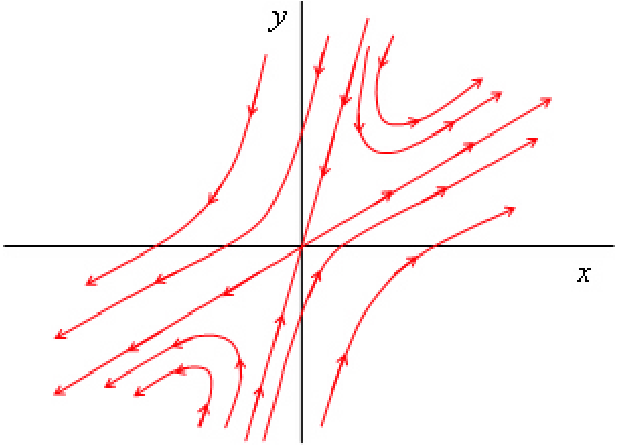


Şekil: Bazı önemli yörüngeler.

Diğer yörüngeler ($k_3 \neq 0$ ve $k_4 \neq 0$) $r_1 < 0 < r_2$ için

$$t \to \infty \text{ iken } \begin{cases} x \to k_4 \dfrac{r_2 - d}{c} e^{r_2 t} \\ y \to k_4 e^{r_2 t} \end{cases} \qquad t \to -\infty \text{ iken } \begin{cases} x \to k_3 \dfrac{r_1 - d}{c} e^{r_1 t} \\ y \to k_3 e^{r_1 t} \end{cases}$$





Şekil: Bir semer noktası komşuluğunda yörüngeler.

Bu tip bir denge noktası bir **semer noktası** olarak adlandırılır. Bu bir kararsız denge noktasıdır, çünkü bu nokta komşuluğundaki çoğu yörüngeler noktadan uzaklaşmaktadırlar.

Faz düzlem denklemini hemen çizmek için en önemli eğriler doğrusal yörüngelerdir ki bunlar denge noktasını kesen tek yörüngeler olup, bu türden tüm doğrusal yörüngeleri belirlemek için kolay bir yol, faz düzlem denkleminde $y = mx$ dönüşümü yapmaktır. Böylece,

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} = \frac{c + dm}{a + bm}$$

veya $bm^2 + (a - d)m - c = 0$ olup, buradan

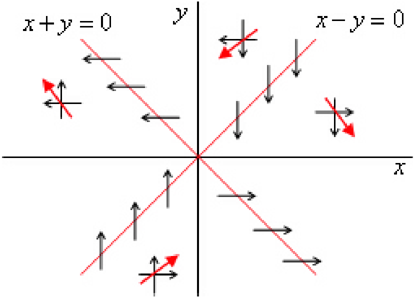
$$m = \frac{d - a \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2b} \tag{24}$$

elde edilir ki bunun $y/x = c/(r - d)$ ye denk olduğu gösterilebilir. Bağımsız değişken t ye göre, üzerinde çözümün eğiminin sabit olduğu bir eğriye bir **eşyönlü** denir. Doğrusal yörüngeleri ve basit eşyönlüleri (ki bunlar üzerinde $dy/dx = 0$ ve $dy/dx = \infty$ dur) bilmek, örneğin bir semer noktalı faz düzlem denklemini kolayca çizmemizi mümkün kılar.

$\left\{ \frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = -2x - 2y \right\}$ sistemini göz önüne alalım.
$p = a + d = -1$, $q = ad - bc = -4$, $\triangle = p^2 - 4q = 17$ olup, $\triangle > 0$ ve $q < 0$ olduğundan semer noktası vardır. Faz düzlem denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x+y)}{x-y}$$

olduğundan **eşyönlüler**: $x - y = 0$ ve $x + y = 0$ doğrularıdır

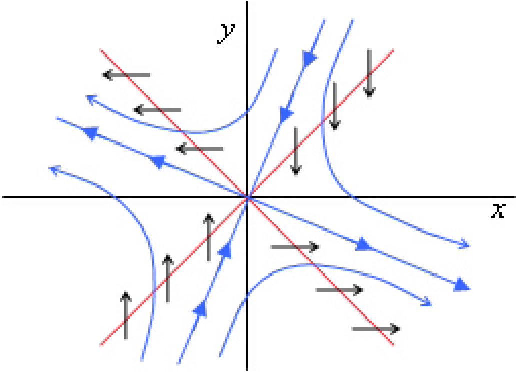


Şekil: Eşyönlüler (oklar zamana bağlı denklemden alınmıştır).

$y = mx$ doğrusal yörüngelerinin eğimleri (24) den

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{-2} \doteq 3.56 \text{ veya } -0.56$$

olup, **basit yörüngeler** $y = 3.56x$ ve $y = -0.56x$ dir. Böylece, aşağıdaki grafiği çizebiliriz.



Şekil: Bir semer noktası komşuluğunda yörüngeler (basit eşyönlüler ve doğrusal yörüngeler temel alınmıştır).