III (A) ve (C) : $\triangle < 0$, $p \neq 0$ durumu.

Kökler karmaşık eşleniktir. $p > 0$ ise reel kısım pozitif, $p < 0$ ise reel kısım negatiftir. $\theta = \arctan(y/x)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2} \\
&= \frac{x(cx+dy) - y(ax+by)}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

ve düzenlenirse,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{cx^2 + (d-a)xy - by^2}{x^2+y^2} \tag{25}$$

elde edilir.

$d\theta/dt \neq 0$ dır; aksi halde $cx^2 + (d-a)xy - by^2 = 0$ olup, buradan

$$\frac{x}{y} = \frac{a - d \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c}$$

bulunur. Kökler karmaşık olduğundan,
$\triangle = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = a^2 - 2ad + d^2 + 4bc = (a-d)^2 + 4bc < 0$ dır. Bu ise x ve y nin reel olması ile çelişir. O halde ya $d\theta/dt > 0$ veya $d\theta/dt < 0$ olmalıdır. $d\theta/dt$ nin hep aynı işarete sahip olması, $\theta(t)$ nin ya hep azalması ya da hep artması demektir. Bu durumda, çözüm ya orjinden dışa doğru ya da orjine doğru bir spiral çizer.
$\triangle < 0$ olduğundan b ve c zıt işaretlere sahiptir. θ nın artmasını veya azalmasını bilmemiz, yörüngeleri çizmemiz için yeterli değildir. Faz düzlem yörüngelerini çizmek için $cx + dy = 0$ ve $ax + by = 0$ basit eşyönlülerini kullanabiliriz.

Example

$$\left\{\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = -bx + ay\right\}$$

sistemini göz önüne alalım. $p = 2a$, $q = a^2 + b^2$, $\triangle = -4b^2 < 0$ olur. Böylece, iki duruma sahibiz:

$$\begin{aligned} a &> 0 \text{ için } \textbf{III(A)} \text{ kararsız durumu,} \\ a &< 0 \text{ için } \textbf{III(C)} \text{ kararlı durumu.} \end{aligned}$$

(25) denkleminden

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-b(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = -b \tag{26}$$

olup, böylece eğer $b < 0$ ise $\theta(t)$ artan, ve eğer $b > 0$ ise $\theta(t)$ azalandır.

Example (devam)

Şimdi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-bx + ay}{ax + by}$$

faz düzlem denklemini göz önüne alalım. Denklem homogen bir denklem olup, $y/x = v$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \arctan v &= -\ln\left[x(1+v^2)^{1/2}\right] + c \\
&\Longrightarrow -\frac{a}{b}\theta - c = \ln(x^2+y^2)^{1/2} \\
&\Longrightarrow (x^2+y^2)^{1/2} = e^{-\frac{a}{b}\theta - c}
\end{aligned}$$

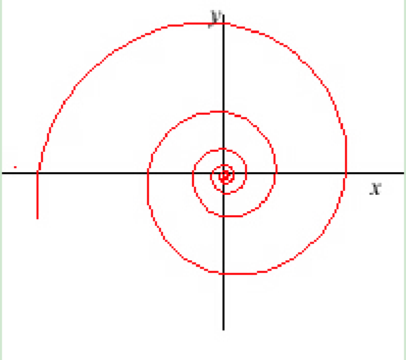
veya

$$r = ke^{-\frac{a}{b}\theta}, \quad k > 0 \tag{27}$$

elde edilir.

Example (devam)

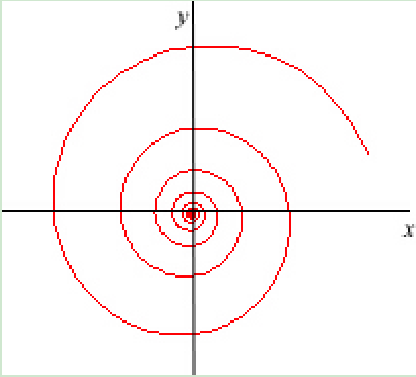
$a \neq 0$ için (27) denklemi **üstel spiral** *olarak adlandırılır. Eğer $a = 0$ ise $r = k$ çemberi elde edilir. Bu durumda karakteristik kökler $\pm ib$ olup, x ve y, dairesel b frekanslı, zamana göre basit harmonik hareketi temsil eder. Eğer* $a/b < 0$ ise, θ artarken r de artar.



Şekil: Sol yönlü spiral.

Example (devam)

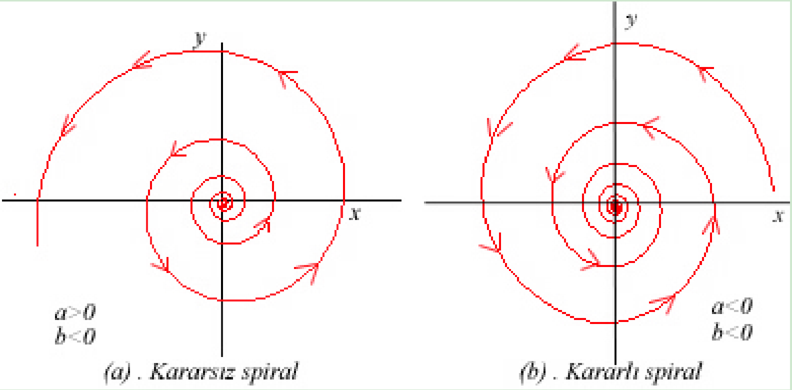
Eğer $a/b > 0$ ise, θ artarken r azalır.



Şekil: Sağ yönlü spiral.

Example (devam)

Zamana bağlı denklemi çözümün geçici hesabı için kullanabiliriz. Örneğin, $x = 0$ da $dx/dt = by$ dir. Böylece, $x = 0$ da $by < 0$ ise x azalır ve $by > 0$ ise x artar.



Şekil: Spiral yörünge.

Bu ve önceki kesimi aşağıdaki gibi özetleyebiliriz:

- Eğer Jakobiyen matrisinin özdeğerleri (karakteristik denkleminin kökleri) negatif ise veya negatif reel kısıma sahipse bu durumda $(0,0)$ noktası **asimptotik kararlıdır** ($\lim_{t\to\infty}(x(t),y(t)=(0,0)$).
- Eğer, Jakobiyen matrisinin özdeğerleri pozitif değilse veya pozitif olmayan reel kısıma sahipse bu durumda $(0,0)$ noktası **kararlıdır**.
- Eğer, Jakobiyen matrisinin özdeğerleri pozitif ise veya pozitif reel kısıma sahipse bu durumda $(0,0)$ noktası **kararsızdır**.

Böylece

$$r^2-(a+d)r+(ad-bc)=r^2-\mathrm{iz}(J)r+\det(J)=0$$

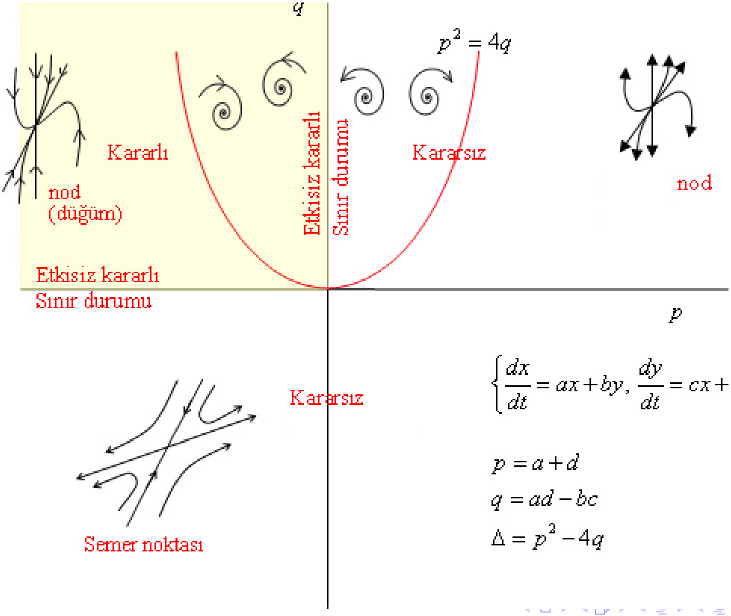
karakteristik denklemine Routh-Hurwitz kriterini (özdeğerler karmaşık düzlemin sol yanında kalırlar ancak ve ancak karakteristik denklemin katsayıları pozitiftir) uygulayarak kararlılığı belirleyebiliriz:

1. $(0,0)$ noktası *asimptotik kararlıdır* ancak ve ancak $\mathrm{iz}(J) < 0$ ve $\det(J) > 0$.
2. $(0,0)$ noktası *kararlıdır* ancak ve ancak $\mathrm{iz}(J) \leq 0$ ve $\det(J) > 0$.
3. $(0,0)$ noktası *kararsızdır* ancak ve ancak $\mathrm{iz}(J) > 0$ ve $\det(J) < 0$.

Ayrıca; $(0,0)$ noktası

1. **düğümdür,** eğer r_1, r_2 reel ve aynı işarete sahipse ($r_1 \leq r_2 < 0$ (düzgün) veya $0 < r_1 \leq r_2$ (düzgün olmayan),
2. **semerdir,** eğer r_1, r_2 reel ve zıt işarete sahipse ($r_1 r_2 < 0$),
3. **spiraldir,** eğer r_1, r_2 karmaşık ve reel kısım sıfırdan farklı ise,
4. **merkezdir,** eğer r_1, r_2 karmaşık ve reel kısım sıfır ise.

Şekil bu ve önceki kesimi özetlemektedir.



$$\left\{\frac{dx}{dt} = ax + by,\ \frac{dy}{dt} = cx + dy\right\}$$

$$p = a + d$$

$$q = ad - bc$$

$$\Delta = p^2 - 4q$$

İki Tür Modeli - Orbitler

Şimdi

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = g(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f(x,y) \end{cases} \tag{28}$$

otonom sistemini göz önüne alalım. Burada $f, g \in C^1(D)$ ve D de $xy-$ düzleminde bir bölgedir. (28) sistemi her zaman bir çözüme sahiptir. $(x_0, y_0) \in D$ olmak üzere, $t = t_0$ da

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \tag{29}$$

başlangıç koşulu ile verilen (28)-(29) başlangıç değer probleminin $t = t_0$ noktasını içeren bir aralıkta *tek bir çözümü* vardır. ((28) sisteminin çözümü olan ve $\{x = x(t),\ y = y(t)\}$ parametrik denklemiyle verilen eğriye bir **orbit (yörünge)** denir.

Theorem

Eğer $\{x = x(t), y = y(t)\}$ *, (28) sisteminin bir çözümü ise, bu durumda herhangi bir* c *sabiti için*

$$\{x_1(t) = x(t+c),\ y_1(t) = y(t+c)\}$$

fonksiyonları da (28) sisteminin bir çözümüdür.

Bu teorem, orbitin başlangıç zamanından bağımsız olduğunu söylemektedir. Bir *sistemin çözümü* ile bir *orbit* arasındaki temel farkı not etmekte yarar vardır: Bir orbit, parametrik olarak birden fazla çözümle temsil edilebilen bir eğridir. Örneğin, $\{x(t), y(t)\}$ ve $\{x(t+c), y(t+c)\}$ çiftleri farklı çözümleri temsil ederler, fakat parametrik olarak aynı eğriyi gösterirler. Yani her iki çözümün de orbiti aynıdır.

Example

$$\left\{ \frac{dx}{dt} = -y, \ \frac{dy}{dt} = x \right\}$$

sistemi için

$$\{ x(t) = \cos t, \ y(t) = \sin t \ \}$$

ve

$$\left\{ x(t) = \cos(t + \frac{\pi}{3}), \ y(t) = \sin(t + \frac{\pi}{3}) \right\}$$

çiftlerinin farklı iki çözüm oldukları açıktır. Fakat her ikisi de aynı

$$x^2 + y^2 = 1$$

orbitinin parametrik denklemidirler.

Theorem

Verilen bir (x_0, y_0) *noktasından geçen en fazla bir orbit vardır.*

Fact

$C_1 : \{x_1(t), \quad y_1(t)\}$ *ve* $C_2 : \{x_2(t), \quad y_2(t)\}$ (x_0, y_0) *noktasından geçen farklı iki orbit olsun. Çözümün tekliğinden dolayı bu iki orbit* (x_0, y_0) *noktasından iki farklı* t_1 *ve* t_2 *zamanında geçmelidir. Yani,* $(x_1(t_1), y_1(t_1)) = (x_0, t_0) = (x_2(t_2), y_2(t_2))$ *olmalıdır. Önceki teoremden,*

$$\{x(t) = x_1(t + (t_1 - t_2)), \; y(t) = y_1(t + (t_1 - t_2))\} \tag{30}$$

de (28) sisteminin bir çözümüdür.
$x(t_2) = x_1(t_1) = x_0, \; y(t_2) = y_1(t_1) = y_0$ *olduğundan, teklik nedeniyle* $x(t) = x_2(t), \; y(t) = y_2(t)$ *dir. Diğer taraftan (30),* $\{x_1(t), y_1(t)\}$ *ile verilen orbitin yeniden parametrizasyonundan başka bir şey değildir. O halde* $C_1 \equiv C_2$ *olmalıdır.*

(28) sisteminin bir (x_c, y_c) kritik (denge) noktasında $g(x_c, y_c) = 0 = f(x_c, y_c)$ olup,

$$\frac{dx}{dt} = 0 = \frac{dy}{dt} \Longleftrightarrow x = \text{sabit},\ y = \text{sabit}$$

olduğundan kritik noktadan geçen bir yörünge sadece bu noktayı içerir. Kritik olmayan bir noktaya bir **düzgün** (regüler**)** nokta denir. Bir düzgün noktadan başlayan bir yörünge; türevlerden en az biri sıfırdan farklı olacağından, bu noktadan uzaklaşır.