

Benzer şekilde,  $S_1(t)$  fonksiyonu

$$\begin{aligned} S_1(t) &= B \sin(\omega t + \beta) \\ &= B \sin \omega t \cos \beta + B \cos \omega t \sin \beta \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir ki buradan

$$B \cos \beta = \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{a}{k}} F_{10} \quad \text{ve} \quad B \sin \beta = S_{10}$$

olup, böylece

$$B = \sqrt{S_{10}^2 + \frac{a\lambda^2}{kc^2} F_{10}^2} \quad (11)$$

ve

$$\tan \beta = -\sqrt{\frac{k}{a} \frac{cS_{10}}{\lambda F_{10}}} \quad (12)$$



(9), (10), (11) ve (12) ifadelerinden, denge noktası komşuluğunda nüfusların sabit genlikte salınım yaptıklarını görürüz ki bu etkisiz kararlı durumdur (II(B):

$p = 0$ ,  $q = -(-ck/\lambda)(a\lambda/c) = ka > 0$ ,  $\Delta = -4ka < 0$ ). Bu bir sınır durumu olduğu için sonuç her zaman sağlanmayabilir. Lineerleştirmede gözardı edilen lineer olmayan terimler muhtemelen küçük değişikliklere yol açar ki bu da çözümün yapısal davranışını tümüyle değiştirmeye yeterlidir. Lineer olmayan terimler çözümün küçük genlikte salınım yapmasına ve denge nüfusunun kararlı olmasına veya tersine büyük genlikte salınım yapmasına ve denge nüfusunun kararsız olmasına neden olabilir. Bu nedenle, *linear analizden bir sonuç elde edemeyiz.*



$(0, 0)$  denge noktasının kararlılığını çalışmak için pertürbasyon yöntemi uygulayalım. (2)-(3) sisteminde  $F = \epsilon F_1$ ,  $S = \epsilon S_1$  yazıp lineer olmayan terimleri atarsak

$$\epsilon \frac{dF_1}{dt} = \epsilon a F_1 \implies F_1(t) = F_{10} e^{at} \quad (13)$$

$$\epsilon \frac{dS_1}{dt} = -k \epsilon S_1 \implies S_1(t) = S_{10} e^{-kt} \quad (14)$$

elde ederiz. Bu çözümlerin anlamı, köpekbalığı nüfusu üstel olarak azalırken, balık nüfusunun da üstel olarak artmasıdır.  $p = a - k$ ,  $q = -ak < 0$ ,  $\Delta = (a + k)^2 > 0$  olduğundan, **I(C) kararsız durumu** oluşur. Yani, denge noktası bir **semer noktasıdır**.



Eşyönlüleri ve basit yörüngeleri kullanarak veya faz düzlem denklemini çözerek yörüngeleri çizebiliriz ve hareket doğrultusunu belirlemek için (13) ve (14) eşitliklerini kullanabiliriz.

Faz düzlem denklemini

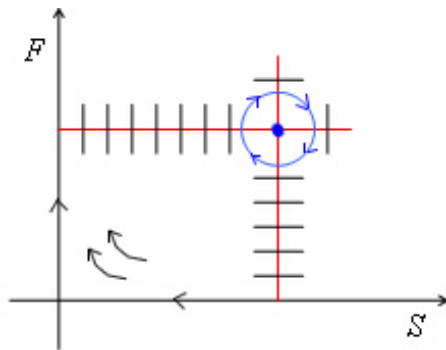
$$\frac{dF_1}{dS_1} = -\frac{aF_1}{kS_1} \quad (15)$$

Olup, çözümlerse

$$\begin{aligned} \ln |F_1| &= -\frac{a}{k} \ln |S_1| + \ln |F_{10}| - \frac{a}{k} \ln |S_{10}| \\ \Rightarrow \ln \left| \frac{F_1}{F_{10}} \right| &= -\frac{a}{k} \ln \left| \frac{S_1}{S_{10}} \right| \\ \Rightarrow F_1 &= F_{10} \left( \frac{S_1}{S_{10}} \right)^{-a/k} \end{aligned}$$

elde edilir.





Şekil: Lineerleştirilmiş kararlılık analizi.

Şimdi

$$\frac{dF}{dS} = \frac{(a - cS)F}{(\lambda F - k)S}$$

faz düzlem denklemini çözüp,  $F(0) = F_0$  ve  $S(0) = S_0$  başlangıç koşullarını kullanırsak

$$\lambda F - k \ln |F| = a \ln |S| - cS + \lambda F_0 - k \ln |F_0| - a \ln |S_0| + cS_0$$

$$\lambda(F - F_0) + c(S - S_0) = k \ln \left| \frac{F}{F_0} \right| + a \ln \left| \frac{S}{S_0} \right|$$

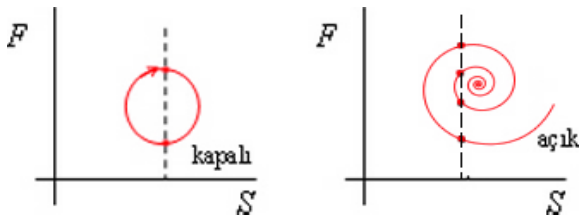
⇒

$$\left( \frac{F}{F_0} \right)^k \left( \frac{S}{S_0} \right)^a = e^{\lambda(F - F_0) + c(S - S_0)} \quad (16)$$

elde ederiz.



(16) ile verilen eğrilerin kapalı eğriler olduklarına dikkat edelim



Şekil: Kapalı ve açık eğriler arasındaki olası fark.

Son denklemden,

$$F^{-k} e^{\lambda F} = \frac{e^{\lambda F_0 + c S_0}}{F_0^k S_0^a} S^a e^{-c S} \quad (17)$$

yazabiliriz.  $K = (e^{\lambda F_0 + c S_0} / F_0^k S_0^a)$  olmak üzere, her iki tarafa  $Z$  dersek,

$$Z = F^{-k} e^{\lambda F} \rightarrow +\infty \begin{cases} \text{cebirselsel} & (F \rightarrow 0) \\ \text{üstel} & (F \rightarrow +\infty) \end{cases} \quad (18)$$

$$Z = K S^a e^{-c S} \rightarrow 0 \begin{cases} \text{cebirselsel} & (S \rightarrow 0) \\ \text{üstel} & (S \rightarrow +\infty) \end{cases} \quad (19)$$

olur.





$$\frac{dZ}{dF} = e^{\lambda F} F^{-k} (-kF^{-1} + \lambda) = 0$$

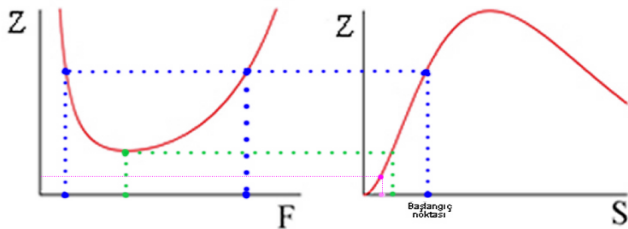
dan  $F = k/\lambda$  minimum ve

$$\frac{dZ}{dt} = KS^a e^{-cS} (aS^{-1} - c) = 0$$

dan  $S = a/c$  maksimum verir.  $(a/c, k/\lambda)$  nın bir denge noktası olduğunu not edelim.

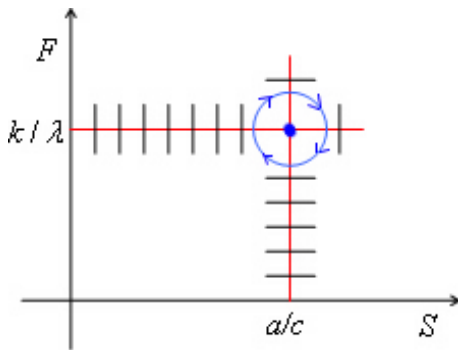


Şimdi  $F$  de 0, 1 veya 2 değer üretecek şekilde  $S$  nin özel bir değerini seçelim:



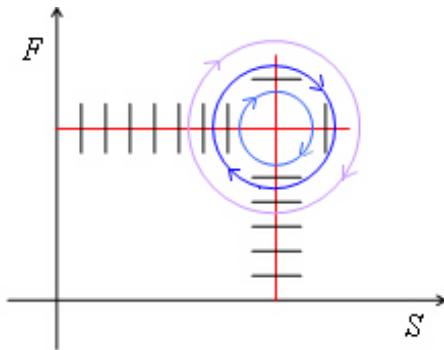
Şekil: (17) fonksiyonun çözümünün grafiksel gösterimi.

$Z = KS^a e^{-cS}$  nin grafiğinde kritik noktadan geçtikten sonra,  $F$  nin aynı değer çifti,  $S$  nin farklı bir değerine karşılık gelir. Böylece, bir çözüm verecek şekilde  $K$  değerinin yeterince büyük olması durumunda faz düzlemindeki eğri, şekildeki gibi, kapalı bir eğri olmalıdır.



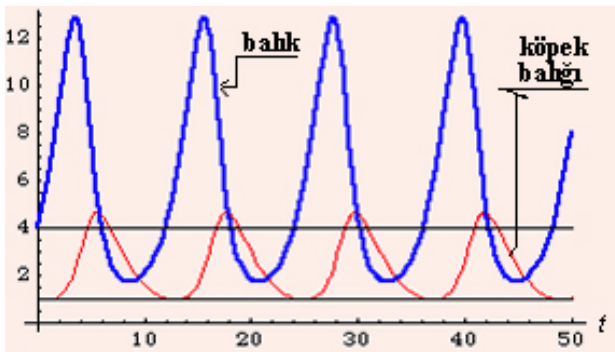
Şekil: Bir yörünge.

$K$  nın her bir değeri için en fazla bir yörünge vardır. Şekilde,  $K$  nın üç farklı değerine karşılık gelen yörüngeler çizilmiştir.



Şekil: Av-avcı ekosisteminin yörüngeleri.

Sonuç olarak  $(a/c, k/\lambda)$  denge noktası komşuluğundaki yörüngeler kapalıdır. Balık ve köpekbalığı nüfusları zamanın periyodik fonksiyonlarıdır. Kaba bir grafik şekildeki gibi verilebilir. Doğada gözlemlendiği gibi, köpekbalığı nüfusunun artması, balık nüfusunun artışını takip eder.



Şekil: Balık-köpekbalığı salınımı.

Şimdi, salınım periyodları sırası ile  $T$  ve  $\tau$  olan avcı ve av nüfuslarının, başlangıç nüfuslarından bağımsız olarak, ortalama nüfuslarını düşünelim.

$$\frac{dS}{dt} = -(k + \lambda F)S$$

olup, böylece

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1}{S} dS = \int_{t_0}^{t_0+T} (-k + \lambda F) dt$$

ve  $S(t_0 + T) = S(t_0)$  olduğundan,

$$0 = -kT + \int_{t_0}^{t_0+T} \lambda F dt$$

yani,

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) dt = \frac{k}{\lambda}$$

olur. O halde *avın ortalama nüfusu denge noktasıdır.*



Benzer şekilde,

$$\frac{dF}{dt} = (a - cS)F$$

olup, buradan

$$\int_{t_1}^{t_1+\tau} \frac{1}{F} dF = \int_{t_1}^{t_1+\tau} (a - cS) dt$$

ve  $F(t_1 + \tau) = F(t_1)$  olduğundan,

$$0 = a\tau - \int_{t_1}^{t_1+\tau} cS dt$$

yani,

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_1}^{t_1+\tau} S(t) dt = \frac{a}{c}$$

olur. O halde **avcının ortalama nüfusu denge noktasıdır.**

