MATEMATİKSEL BİYOLOJİ ve BİYOKİMYA

İçerik

1. Giriş
2. Nüfus Modelleri (Sayıya ve Yaşa Dayalı)
3. Bulaşıcı Hastalık Modelleri
4. Biyokimyasal Tepkimeler

GİRİŞ

Önceki bölümde, nüfusun zamana göre sürekli bir fonksiyon olarak değiştiğini kabul eden temel nüfus modelleri üzerinden, kararlılık analizi kavramlarını tartıştık. Halbuki nüfusu evreye, sayıya veya yaşa göre planlamak, örneğin devletlerin ekonomik gelişimlerini planlamalarına veya ülkelerin nüfus dinamiğini daha iyi analiz edebilmelerine yardım eder. Bunun yanısıra, birçok biyolojik türün nüfus modelini **sayıya** veya **yaşa–dayalı** kurmak daha gerçekçi görünmektedir. Ayrıca, bulaşıcı hastalıkların yayılımını modellemek de ilgi çekici görünmektedir. Çünkü salgınları kontrol altında tutmak veya önlemek günümüzde ülkelerin önemli ekonomik ve sağlık problemlerinden biri durumuna gelmiştir.
Bu bölümde;

- sayıya veya yaşa bağlı modeller,
- bulaşıcı hastalıkların yayılımı ve
- biyokimyasal modeller

üzerinde çalışacağız.

NÜFUS MODELLERİ

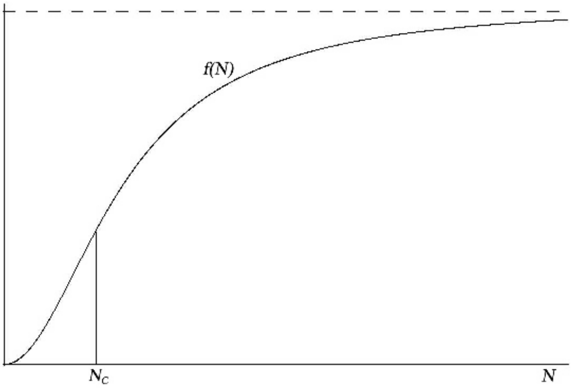
Nüfus modelleri evreye, sayıya veya yaşa göre planlanabilir. Örneğin, nüfusun çocuk ve yetişkin olarak iki gelişim evresine göre düzenlendiği evreye-dayalı bir model kurulabilir. Evreye dayalı modeller birçok gelişim evresi içerebilirler. Böcekler için gelişim evreleri; yumurta, kurtcuk (larva), yavru (pupa) ve yetişkin evreleridir. Sayıya dayalı modellerde bireyler boyut veya ağırlıkla ölçülebilen sayılara göre sınıflandırılabilirler. Örneğin balık nüfuslarında yapı değişkeni çoğu zaman boyuttur. Yaşa-dayalı modellerde nüfus yaş gruplarına ayrılır. Örneğin insan demografisinde bu 5-10, 10-15 v.s. gibi 5 yıllık yaş gurupları olabilir. Evreler, yaşlar veya boyutlar arasındaki dinamik etkileşimler nüfus yapısının zamana göre nasıl değiştiğini belirlemektedir.

Sayıya dayalı model: Ladin kurdu

Kanada ormanlarının temel problemlerinden biri, ağaç kurtlarının verdikleri zararlar olup, Ludwig ve arkadaşları (1978) ladin ağacı kurtlarının nüfus dinamiği için aşağıdaki modeli önermişlerdir:

$$\frac{dN}{dt} = r_B N(1 - \frac{N}{K_B}) - f(N)$$

Burada r_B kurtların doğrusal doğum oranı ve K_B de ağaçlardaki mevcut olan yiyecek kaynağının yoğunluğu ile ilişkili olan taşıma kapasitesini göstermektedir. $f(N)$ fonksiyonu ise kurdun avcısını (genellikle kuşları) temsil etmekte olup, şekildeki niteliksel yapıya sahiptir.



Şekil: $f(N)$ nin nitel yapısı. N_C sınır değerinden küçük nüfuslar için avcının yemi azdır, büyük nüfuslar için yem fazladır.

N kurt nüfusunun az yoğunlukta olması durumunda, başka yerlerde yiyecek arayacakları için, avcıların nüfusları azalır. Kurt nüfusunun yoğunlaşması durumunda ise avcı nüfusu da artar. Böylece $f(N)$ için uygun bir fonksiyon, A ve B pozitif sabitler olmak üzere $BN^2/\left(A^2+N^2\right)$ olabilir. Bu durumda, yukarıdaki genel model

$$\frac{dN}{dt} = r_B N(1-\frac{N}{K_B}) - \frac{BN^2}{A^2+N^2} \tag{1}$$

şeklini alır. Bu denklem r_B, K_B, A ve B parametrelerini içermekte olup, A ve K_B parametreleri N ile aynı boyuta sahiptir. r_B nin boyutu $\left[T^{-1}\right]$ ve B nin boyutu ise $\left[NT^{-1}\right]$ dir. A parametresi avcının dönüm yaptığı N_C eşik değerinin bir ölçüsüdür.

Modeli birimlerden bağımsız yapmak için, boyutsuz terimler cinsinden ifade edelim (Bkz. Kesim 3.3). Bunun için,

$$u = \frac{N}{A}, \quad p = \frac{Ar_B}{B}, \quad q = \frac{K_B}{A}, \quad \tau = \frac{Bt}{A} \tag{2}$$

alıp, bu boyutsuz terimleri (1) denkleminde kullanırsak,

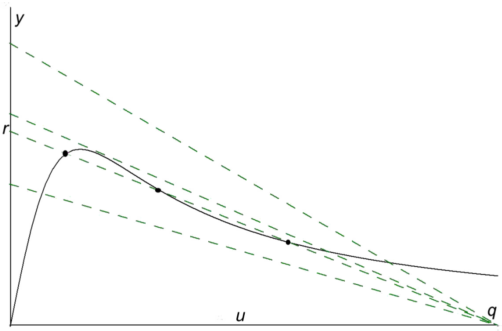
$$\frac{dN}{d\tau} = ru(1 - \frac{u}{q}) - \frac{u^2}{1+u^2} \tag{3}$$

denklemini elde ederiz. Denge çözümleri açıkça, $u = 0$ veya

$$r(1 - \frac{u}{q}) = \frac{u}{1+u^2} \tag{4}$$

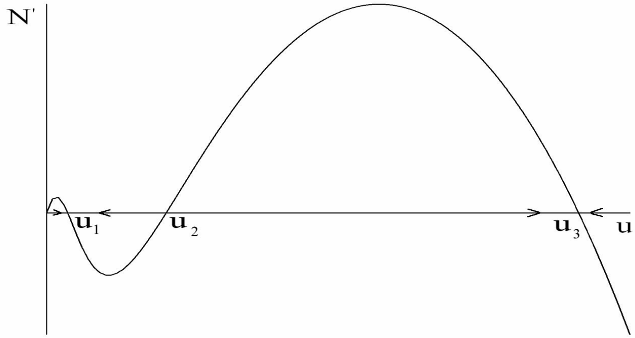
eşitliğini sağlayan u değerleridir. (4) eşitliği üçüncü dereceden bir polinoma karşılık gelmekte olup, analitik çözümleri oldukça karmaşıktır.

Çözümler $r(1-\frac{u}{q})$ doğruları ile $\frac{u}{1+u^2}$ eğrisinin kesim noktaları olup, konumları grafiksel olarak aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Şekildenden de görüleceği gibi, r ve q nun değerlerine bağlı olarak bir, iki veya üç çözüm elde edilebilir.



Şekil: Ladin kurdu modelinin denge noktaları. r küçük iken bir tane denge noktası vardır. r büyüdükçe denge noktası sayısı ikiye ve daha sonra üçe çıkar. İlk ve son denge nokası kararlı olup ortadaki ise kararsızdır.

Oklar çözümün zamanla nasıl değiştiğini göstermektedir. u_1 den daha az nüfus için $dN/d\tau > 0$ yani N artan ve u_1 ve u_2 arasındaki nüfus için $dN/d\tau < 0$ yani N azalan olup u_1 denge noktası **kararlıdır**. Benzer şekilde u_2 ve u_3 arasındaki nüfus için $dN/d\tau > 0$ yani N artan ve u_3 den daha büyük nüfus için $dN/d\tau < 0$ yani N azalan olup u_3 denge noktası da **kararlıdır**. u_2 noktası ise kararsızdır.



Şekil: $\frac{dN}{d\tau} = ru(1-\frac{u}{q}) - \frac{u^2}{1+u^2}$ nun grafiği.

Yaşa dayalı model

Yaşa dayalı nüfus dinamiği çalışmalarının öncülerinden birisi **Leslie** (1900-1974) tarafından verilen birinci basamaktan lineer fark denklemlerinden oluşan bir matris sistem modelidir.

- Yaşa dayalı model bir yapısal modeldir.

Matematiksel biyolojinin en eski problemlerinden biri olan Fibonacci tavşanları problemi (altın oran, sürekli kesirler ve ayçiçeğinin büyümesi) ve çift cinsiyetli solucan modeli incelenecek

Yaşa dayalı model

Yaşa dayalı nüfus dinamiği çalışmalarının öncülerinden birisi **Leslie** (1900-1974) tarafından verilen birinci basamaktan lineer fark denklemlerinden oluşan bir matris sistem modelidir.

- Yaşa dayalı model bir yapısal modeldir.
- Ekonomik planlamalara yardım eder.

Matematiksel biyolojinin en eski problemlerinden biri olan Fibonacci tavşanları problemi (altın oran, sürekli kesirler ve ayçiçeğinin büyümesi) ve çift cinsiyetli solucan modeli incelenecek

Yaşa dayalı model

Yaşa dayalı nüfus dinamiği çalışmalarının öncülerinden birisi **Leslie** (1900-1974) tarafından verilen birinci basamaktan lineer fark denklemlerinden oluşan bir matris sistem modelidir.

- Yaşa dayalı model bir yapısal modeldir.
- Ekonomik planlamalara yardım eder.
- Evrimsel biyologların bir türün yaşam sürecini anlamalarına yardım edebilir.

Matematiksel biyolojinin en eski problemlerinden biri olan Fibonacci tavşanları problemi (altın oran, sürekli kesirler ve ayçiçeğinin büyümesi) ve çift cinsiyetli solucan modeli incelenecek

Yaşa dayalı model

Yaşa dayalı nüfus dinamiği çalışmalarının öncülerinden birisi **Leslie** (1900-1974) tarafından verilen birinci basamaktan lineer fark denklemlerinden oluşan bir matris sistem modelidir.

- Yaşa dayalı model bir yapısal modeldir.
- Ekonomik planlamalara yardım eder.
- Evrimsel biyologların bir türün yaşam sürecini anlamalarına yardım edebilir.
- Yavruların farklı zamanlarda doğmalarının sonucu oluşur.

Matematiksel biyolojinin en eski problemlerinden biri olan Fibonacci tavşanları problemi (altın oran, sürekli kesirler ve ayçiçeğinin büyümesi) ve çift cinsiyetli solucan modeli incelenecek

Yaşa dayalı model

Yaşa dayalı nüfus dinamiği çalışmalarının öncülerinden birisi **Leslie** (1900-1974) tarafından verilen birinci basamaktan lineer fark denklemlerinden oluşan bir matris sistem modelidir.

- Yaşa dayalı model bir yapısal modeldir.
- Ekonomik planlamalara yardım eder.
- Evrimsel biyologların bir türün yaşam sürecini anlamalarına yardım edebilir.
- Yavruların farklı zamanlarda doğmalarının sonucu oluşur.
- Eğer farklı yaşlardaki ortalama doğum veya ölüm oranları sabit ise, bu durumda kararlı bir yaş-yapısı oluşur. Fakat, doğum veya ölüm oranlarındaki hızlı bir değişim yaş-yapısının dağılımda kaymalara neden olur.

Matematiksel biyolojinin en eski problemlerinden biri olan Fibonacci tavşanları problemi (altın oran, sürekli kesirler ve ayçiçeğinin büyümesi) ve çift cinsiyetli solucan modeli incelenecek

Fibonacci tavşanları

İtalyan matematikçi Fibonacci tarafından 1202 yılında şu bulmaca sunulmuştur:

> *Bir çiftçi yeni doğmuş bir dişi-erkek tavşan çiftini bir kümese bırakır. Tavşanların çiftleşme yaşına gelme süreleri bir aydır. Çiftleşmeden bir ay sonra dişiler birer çift (bir dişi-bir erkek) tavşan doğurmaktadırlar ve tekrar çiftleşmektedirler. Hiç bir tavşanın ölmediğini kabul edelim. Bir yılın sonunda kaç çift tavşan olur?*

x_n, n-yinci ayın başıda, yeni doğan tavşanların ardından sayılan tavşan çifti sayısını göstersin. Böylece **13**-üncü ayın başında sayılan tavşan sayısı problemin çözümü olacaktır. İlk ayın başındaki yeni doğan çift sayısı 1 olduğu için ve ikinci ayın başında henüz yeni doğan çift olmadığı için (bir ay sonra doğuracak bir adet erişkin çift var) $x_1 = 1$ ve $x_2 = 1$ dir. Üçüncü ayın başında nüfus $x_3 = x_2 + x_1$ olup, önceki aydan gelen x_2 tavşan çiftini (ki 1 adettir) ve şimdi doğum yapacak erişkinlikte olan x_1 dişi tavşanın doğurduğu yeni doğan x_1 tavşan çiftini (ki 1 adettir) içermektedir. Genel olarak

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \tag{5}$$

olur. Böylece

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

Fibonacci dizisini elde ederiz. O halde 12 ayın sonunda $x_{13} = 233$ (144 yetişkin ve 89 yeni doğan) tavşan olur.