

Yaşa-dayalı ayırık model

Bir ayırık modelde, nüfus sayımları ayırık zamanlarda gerçekleşir ve bireyler dilimlenmiş yaş sınıflarına ayrılırlar. Modelin basitliği için yaş dilimlemeleri ile sayım sürelerini aynı alalım. (Örneğin beş yılda bir sayım yapmak ve yaş sınıflarını 0-4, 5-9 v.s şeklinde dilimlemek.) Sayımlarda normalde hem dişi hem de erkekler sayılmakla beraber, burada sadece dişileri sayacağız.

$x_{i,n}$, n -yinci sayıma göre i -yinci yaş sınıfındaki dişi sayısı; (s_1 ilk sayıma kadar canlı kalan dişi yüzdesi olmak üzere) s_i , $(i-1)$ -inci yaş sınıfından i -yinci yaş sınıfına geçen (ölmeyen) dişi yüzdesi; b_i , i -yinci yaş sınıfındaki dişi başına düşen beklenen dişi doğumların sayısı; $i=1$ ilk yaş sınıfı, $i=k$ son yaş sınıfı olsun. Son yaş sınıfından sonra yaşayan dişi olmasın ve ilk sayım $n=1$ iken yapılsın.



$\{x_{i,n+1}\}$ lerin $\{x_{i,n}\}$ ler cinsinden fark denklemlerini oluşturacağız.

Öncelikle, $(n+1)$ -inci sayımda yenidoğanlar, n -yinci sayım ile $(n+1)$ -inci sayım arasında, farklı doğurganlığa sahip, farklı yaşlardaki dişiler tarafından doğurulurlar. Ayrıca, bu yeni doğanların sadece bir kesimi ilk sayımlarına kadar yaşarlar. İkinci olarak, n -yinci sayımda sayılmış olan i -yinci yaş sınıfındaki dişilerin sadece bir kesimi $(n+1)$ -inci sayımda, $(i+1)$ -inci yaş sınıfında sayılacak kadar yaşarlar. Bu bilgileri uygun olarak tanımlanan parametrelerle birleştirirsek, $\{x_{i,n+1}\}$ için fark denklemleri

$$x_{1,n+1} = s_1 (b_1 x_{1,n} + b_2 x_{2,n} + \cdots + b_k x_{k,n})$$

$$x_{2,n+1} = s_2 x_{1,n}$$

$$x_{3,n+1} = s_3 x_{2,n}$$

$$\vdots$$

$$x_{k,n+1} = s_k x_{k-1,n}$$



$$\begin{pmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \\ x_{3,n+1} \\ \vdots \\ x_{k,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 b_1 & s_1 b_2 & \cdots & s_1 b_{k-1} & s_1 b_k \\ s_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ x_{3,n} \\ \vdots \\ x_{k,n} \end{pmatrix}$$

veya kısaca

$$\mathbf{x}_{n+1} = L\mathbf{x}_n \quad (11)$$

sistemi ile belirlenebilir. Burada L matrisi **Leslie matrisi** olarak adlandırılır.



Bu lineer denklem sistemi Leslie matrisinin özdeğerleri ve karşılık gelen özvektörleri bulunarak çözülebilir. Bunun için $\det(L - \lambda I) = 0$ karakteristik denklemi doğrudan çözülebilir veya (11) sistemi ilk yaş sınıfındaki dişilerin sayısını veren değişkene göre yüksek basamaktan tek bir denkleme dönüştürülebilir ki bunun için ikinci denklemden başlarsak;

$$X_{2,n+1} = S_2 X_{1,n}$$

$$\begin{aligned} X_{3,n+1} &= S_3 X_{2,n} \\ &= S_3 S_2 X_{1,n-1} \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} X_{k,n+1} &= S_k X_{k-1,n} \\ &= S_k S_{k-1} X_{k-2,n-1} \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$= S_k S_{k-1} \cdots S_2 X_{1,n-k-2}$$

elde ederiz.



Eğer doğumdan i -yinci yaş sınıfına kadar canlı kalan dişilerin kesrine $l_i = s_1 s_2 \cdots s_i$ dersek ve $f_i = b_i l_i$ alırsak, bu durumda (11) sisteminin ilk satırı

$$x_{1,n+1} = f_1 x_{1,n} + f_2 x_{1,n-1} + \cdots + f_k x_{1,n-k+1} \quad (12)$$

şeklini alır. Burada $n \geq k$ kabul ediyoruz ki böylece $(n+1)$ sayımda sayılan tüm dişiler ilk sayımdan sonra doğmuş olurlar.

(12) de $x_{1,n} = \lambda^n$ dönüşümü yapıлып, denklem λ^{n+1} ile bölünürse, hem gerçel hem de karmaşık eşlenik köklere sahip olabilen,

$$\sum_{j=1}^k f_j \lambda^{-j} = 1 \quad (13)$$

Euler-Lotka ayrık denklemi elde edilir.



λ özdeğeri belirlendikten sonra, karşılık gelen \mathbf{v} özvektörü Leslie matrisi kullanılarak

$$\begin{pmatrix} s_1 b_1 - \lambda & s_1 b_2 & \cdots & s_1 b_{k-1} & s_1 b_k \\ s_2 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_k & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

sisteminden bulunabilir.



$v_k = l_k / \lambda^k$ alıp, son satırdan $v_{k-1} = \lambda v_k / s_k = \lambda l_k / \lambda^k s_k = l_{k-1} / \lambda^{k-1}$
ve böylece son satırdan başa doğru giderek, $v_{k-2} = l_{k-2} / \lambda^{k-2}$, ...,
 $v_1 = l_1 / \lambda$ yani

$$v_i = l_i / \lambda^i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

elde edilir. Ardışık iki yaş sınıfının oranını oluşturarak, bu sonuçtan ilginç bir anlam çıkarabiliriz. Eğer λ bir baskın özdeğer (ve nüfusta olduğu gibi gerçel ve pozitif) ise, bu durumda asimptotik olarak

$$\begin{aligned} x_{i+1,n} / x_{i,n} &\sim v_{i+1} / v_i \\ &= s_{i+1} / \lambda \end{aligned}$$

elde ederiz. $\{s_i\}$ canlı kalma oranlarını sabit tutarsak, bu durumda daha küçük pozitif λ daha büyük bir oran gerçekler: az büyüyen (veya azalan) nüfus daha hızlı büyüyen nüfusa göre bağıl olarak daha yaşlı bireylerden oluşur.



Eğer basitçe bir nüfusun büyüdüğünü veya azaldığını belirlersek, dişilerin dişi yavru doğurma net beklentisi olarak tanımlanan *temel üreme oranı* \mathcal{R}_0 ı hesaplayabiliriz. Eğer dişi ölmeden hemen önce doğurursa, durağanlık oluşur. Eğer $\mathcal{R}_0 > 0$ ise, bu durumda nüfus büyür. $\mathcal{R}_0 < 0$ ise, bu durumda nüfus azalır. \mathcal{R}_0 , bir dişinin tüm yaş sınıfları üzerinden toplanan, doğurması beklenen dişi yavruların sayısına eşittir, yani

$$\mathcal{R}_0 = \sum_{i=1}^k f_i.$$

Yaklaşık olarak eşit sayıda erkek ve dişiye sahip bir nüfus için $\mathcal{R}_0 = 1$ in anlamı bir dişinin tüm hayatı boyunca ortalama iki yavru doğurmasıdır. (Fakat insan nüfusu için, bu değer **2.1** olması sözkonusudur, çünkü doğurganlık yaşına gelmeden çocukların $0.1/2.1 \approx 0.047$ yani yaklaşık olarak **%5** inin öldüğü tahmin edilmektedir. Ülkelerin geçmişteki demografik yapıları ve gelecekteki tahmini demografik yapıları için <http://www.census.gov> sitesine bakılabilir.)



Yaşa-dayalı sürekli model

Bir yaş sınıfının (sayımlar arasındaki uzunluğa da eşit olan) $\Delta\tau$ grup uzunluğu sıfıra gidecek şekilde (12) ayrık modelini göz önüne alarak bir sürekli–zaman modeli oluşturabiliriz. $n > k$ için eşitliği

$$x_{1,n} = \sum_{i=1}^k f_i x_{1,n-i} \quad (14)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrık modeldeki ilk yaş sınıfı iki ardışık sayım arasında doğan dişileri içermektedir. Sürekli modelde karşılık gelen fonksiyon ise $x_{1,n} = B(t_n)\Delta\tau$ olmak üzere tüm nüfusun dişi doğum oranı $B(t)$ olacaktır. Eğer n -yinci sayımın bir $t_n = n\Delta\tau$ zamanında yapıldığını varsayarsak, bu durumda $x_{1,n-i} = B(t_n - t_i)\Delta\tau$ olur. $f_i = b_i l_i$ parametresinin sürekli model karşılığını belirlemek için, τ yaşına kadar canlı kalan yenidoğan dişilerin oranını veren yaşa–bağlı *yaşam fonksiyonu* $y(\tau)$ yu, ve τ ve $\tau + \Delta\tau$ yaşları arasında bir dişinin doğurduğu ortalama dişi sayısını veren yaşa–bağlı *doğurganlık fonksiyonu* $m(\tau)$ yu tanımlayalım.



Yaşa-bağlı net doğurganlık fonksiyonu $f(\tau) = m(\tau)y(\tau)$ ve $\tau_i = i\Delta\tau$ ile birlikte

$$f_i = f(\tau_i)\Delta\tau$$

eşitliğine sahibiz. Bu yeni tanımlarla (14) eşitliği

$$B(t_n)\Delta\tau = \sum_{i=1}^k f(\tau_i)B(t_n - t_i)(\Delta\tau)^2$$

şeklini alır. Eşitliği $\Delta\tau$ ile bölüp, $t_i = \tau_i$ yi göz önüne alırsak sağ taraf bir Riemann toplamına dönüşür. $t_n = t$ alıp, dişi doğurganlık yaşının maksimumundan büyük τ lar için $f(\tau) = 0$ dersek, $\Delta\tau \rightarrow 0$ durumunda (14) denklemi

$$B(t) = \int_0^{\infty} B(t - \tau)f(\tau)d\tau \quad (15)$$

eşitliğine dönüşür.



(15) denkleminde $B(t) = e^{rt}$ alırsak, denklem

$$e^{rt} = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{r(t-\tau)} d\tau$$

şeklini alır. Denklemi e^{rt} ile bölersek, *Euler-Lotka denkleminin* sürekli formu olan

$$\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-r\tau} d\tau = 1 \quad (16)$$

eşitliğini elde ederiz. (16) denklemi, yaşa bağlı net doğurganlık fonksiyonu $f(\tau)$ verilmek üzere, r ye göre bir integral denklemdir. $f(\tau)$ negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere, (15) denkleminin tek bir r_* gerçekte kökünün var olduğu ve nüfusun e^{r_*t} ye asimptotik olarak büyüdüğü ($r_* > 0$) veya azaldığı ($r_* < 0$) ispatlanabilir. Nüfus büyüme oranı r_* **asıl büyüme oranı** veya *Malthusyan parametresi* olarak adlandırılır.



$$F(r) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-r\tau} d\tau - 1 = 0 \quad (17)$$

dersek, Newton yöntemi ile, bir $r = x_0$ tahmini ile başlayarak, çözümüne

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \\ &= x_n + \frac{\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-x_n\tau} d\tau - 1}{\int_0^{\infty} \tau f(\tau) e^{-x_n\tau} d\tau}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

ardışık iterasyonları ile yaklaşabiliriz.

Asimptotik olarak kararlı bir yaş yapısına erişildikten sonra, nüfus büyümesi $e^{r_* t}$ üstel büyümesine benzer davranır ki bu da r_* in kişi başı sabit doğum oranı b ve ölüm oranı d den bulunabileceğini önermektedir. Gerçekten, b ve d nin ifadelerini elde ederek $r_* = b - d$ olduğunu gösterebiliriz.

