1.2 Önemli Sürekli Dağılımlar

Bu bölümde sigortacılık ve aktüeryada sıklıkla kullanılan bazı sürekli dağılımlara yer verilmiştir.

1.2.1 Gamma Dağılımı

$$X \sim \gamma(\alpha, \lambda), \quad \alpha > 0, \qquad \lambda > 0$$

X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

biçimindedir. Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 'dir.

Not: α tam sayı ise dağılım Erlang dağılımı olarak bilinir ve dağılım fonksiyonu

$$F(x) = 1 - \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^j}{j!}, \quad x > 0$$

Gamma dağılımının n. momenti

$$E(X^n) = \int_0^\infty x^n \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+n-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\lambda^{\alpha+n}} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\lambda^n}$$

$$E(X^n) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)\lambda^n}$$

beklenen değeri

$$E(X) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)\lambda^1} = \frac{\alpha!}{(\alpha - 1)!\,\lambda} = \frac{\alpha(\alpha - 1)!}{(\alpha - 1)!\,\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

ikinci momenti

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2} = \frac{(\alpha + 1)!}{(\alpha - 1)!\,\lambda^2} = \frac{(\alpha + 1)\alpha(\alpha - 1)!}{(\alpha - 1)!\,\lambda^2} = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\lambda^2}$$

varyansı

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\lambda^2} - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

moment çıkaran fonksiyonu

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(\lambda - t)^\alpha}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha$$

biçiminde elde edilir.

Çarpıklık katsayısı aşağıdaki eşitlik ile verilir.

$$S_k(X) = \frac{E[X - E(X)]^3}{[Var(X)]^{3/2}}$$

Burada

$$E[X - E(X)]^3 = E\left(X - \frac{\alpha}{\lambda}\right)^3$$

$$= E\left(X^3 - 3X^2\frac{\alpha}{\lambda} + 3X\frac{\alpha^2}{\lambda^2} - \frac{\alpha^3}{\lambda^3}\right)$$

$$= E(X^3) - 3\frac{\alpha}{\lambda}E(X^2) + 3\frac{\alpha^2}{\lambda^2}E(X) - \frac{\alpha^3}{\lambda^3}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3} - 3\frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}\right) + 3\frac{\alpha^2}{\lambda^2}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) - \frac{\alpha^3}{\lambda^3}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) - 3\alpha^2(\alpha+1) + 2\alpha^3}{\lambda^3} = \frac{2\alpha}{\lambda^3}$$

olarak elde edilir. Bu ifade çarpıklık katsayısında yerine konursa, çarpıklık katsayısı

$$S_k(X) = \frac{\frac{2\alpha}{\lambda^3}}{\left(\frac{\alpha}{\lambda^2}\right)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

olur.

1.2.2 Üstel Dağılım

Gamma dağılımda $\alpha = 1$ alındığında üstel dağılım elde edilir. Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0, \qquad \lambda > 0$$

biçimindedir. Dağılım fonksiyonu

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda} \ , \qquad x > 0$$

n. momenti

$$E(X^n) = \frac{\text{n!}}{\lambda^n}$$

beklenen değeri

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

varyansı

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

ve moment çıkaran fonksiyonu

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad , \ t < \lambda$$

olarak elde edilir.