1.2.5 Lognormal Dağılım

X rastgele değişkeninin dağılımı $Lognormal(\mu,\sigma)$ olsun. $(X \sim LN(\mu,\sigma))$ X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log x - \mu)^2\right\} \quad ,x > 0$$

biçimindedir. Dağılım fonksiyonu olasılık yoğunluk fonksiyonunun integrali alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log y - \mu)^2\right\} dy$$

Burada $z = \log y$ denirse dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\log x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(z - \mu)^2\right\} dz$$

olur. İntegralin içindeki ifade Normal dağılım olduğundan yukarıdaki eşitlik

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)$$

biçiminde yazılır. Böylece Lognormal dağılımın olasılıkları, standart normal dağılım kullanılarak hesaplanabilir. O halde lognormal dağılım ile normal dağılım arasındaki ilişki

$$X \sim LN(\mu,\sigma) \Rightarrow \log X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

biçimindedir. Bu ilişki sayesinde lognormal dağılımın momentleri kolaylıkla elde edilebilir. Eğer $X \sim LN(\mu, \sigma) \Longrightarrow Y = \log X$ dönüşümü yapıldığında, X rastgele değişkeninin n. momenti aşağıdaki gibi yazılır:

$$E(X^n) = E(e^{nY}) = M_Y(n) = \exp\left\{\mu n + \frac{1}{2}\sigma^2 n^2\right\}$$

1.3 Karma (Mixed) Dağılımlar

Aktüeryada karma dağılımlar sıklıkla kullanılır. Konunun anlaşılabilmesi için X ortalaması 100 olan üstel dağılıma sahip olsun ve Y rastgele değişkeni aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$Y = \begin{cases} 0, & X < 20 \\ X - 20, & 20 \le X < 300 \\ 280, & x \ge 300 \end{cases}$$

Y'nin sıfıra eşit olma olasılığı

$$P(Y = 0) = P(X < 20) = 1 - e^{-0.2} = 0.1813$$

olur. Benzer şekilde

$$P(Y = 280) = 0.0498$$

olarak elde edilir, yani 0 ve 280 noktasında olasılık fonksiyonuna sahiptir. (0,280) aralığında ise Y'nin dağılımı süreklidir, yani örneğin $P(30 < Y \le 100)$ olasılığının sonucu bulmak istenirse,

$$P(30 < Y \le 100) = P(50 < X \le 120) = 0.3053$$

biçiminde bulunur.

(0,280) aralığında Y'nin yoğunluk fonksiyonu vardır. h ile Y rastgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu gösterilirse, Y'nin momentleri aşağıda verilen eşitlik yardımıyla bulunur:

$$E[Y^r] = \int_0^{280} x^r h(x) dx + 280^r P(Y = 280)$$

Stieltjes integral notasyonu yardımıyla, kesikli, sürekli ya da karma dağılım için r. moment

$$E[Y^r] = \int_0^{\infty} x^r dH(x)$$

olarak yazılır.

1.4 Sigorta Uygulamaları

Burada rastgele değişkenlerin bazı fonksiyonları ele alınmıştır. Sigorta şirketi, prim ödemesi karşılığında riski reasürans şirketle paylaşmaktadır. Sigorta şirketi ve reasürans şirket arasında bu paylaşımın nasıl yapıldığından bahsedilmiştir.

1.4.1 Oransal Reasürans

Oransal reasürans anlaşmasında, sigorta şirketinin ödemesi gereken her bir hasarın a kadar belli bir yüzdesi sigorta şirketi, geri kalan $1 - a$ kadarlık yüzdesi reasürans şirketi tarafından ödenir.

$Y \rightarrow$ Sigorta şirketi tarafından ödenen

$Z \rightarrow$ Reasürans tarafından ödenen

miktar olsun.

$$Y = aX$$
$$Z = (1 - a)X$$
$$Y + Z = aX + (1 - a)X = X$$

Kısaca Y ve Z, X ‘in bir dönüşümü olmaktadır. Y’nin dağılım fonksiyonu,

$$P(Y \leq x) = P(aX \leq x) = P\left(X \leq \frac{x}{a}\right) = F\left(\frac{x}{a}\right)$$

ve yoğunluk fonksiyonu

$$\frac{dF\left(\frac{x}{a}\right)}{dx} = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$$

olur.

Örnek: $X \sim \gamma(\alpha, \lambda)$ iken $Y = aX$'in dağılımı nedir?

Çözüm: $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda} \ , \quad x > 0$

$$f_Y(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda x}{a}}}{a^{\alpha}\Gamma(\alpha)} = \frac{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{\alpha-1} x^{\alpha} e^{-\left(\frac{\lambda}{a}\right)x}}{\Gamma(\alpha)}$$

Dolayısıyla $Y = aX \sim \gamma\left(\alpha, \frac{\lambda}{a}\right)$ olur.