## 2. FAYDA (YARAR) TEORİSİ

Fayda teorisi çok sayıda uygulama alanı olan bir konudur, burada sadece sigorta yönüyle ela alınacaktır.

### 2.1 Fayda (Yarar) Fonksiyonları

$u(x)$ fayda fonksiyonu faydayı ölçen bir fonksiyon olarak tanımlanır. $u(x)$ fayda fonksiyonun aşağıdaki koşulları sağladığı varsayılır:

$$u'(x) > 0 \qquad \text{ve} \qquad u''(x) < 0$$

Matematiksel olarak ilk ifade $u$'nun artan bir fonksiyon olduğunu, ikinci ifade ise $u$'nun konkav bir fonksiyon olduğunu söyler.

Yukarıdaki koşulları sağlayan fayda fonksiyonuna sahip bir bireyin, riskten kaçan olduğu söylenir ve riskten kaçma katsayısı aşağıda verilen formülle hesaplanır.

$$r(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)}$$

### 2.2 Beklenen Fayda Kriteri

Karar vericiler beklenen fayda kriterine göre karar alırlar. Bu kriter, iki fayda kriterinden hangisinin beklenen faydası daha yüksek ise onun tercih edileceğini söyler. Beklenen faydalar eşit ise, hangisinin tercih edildiğinin farkı yoktur.

Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için, yarar fonksiyonu $u$ olan bir yatırımcının sırasıyla $X_1$ ve $X_2$ kazançlarına sahip olan iki yatırımdan birini seçeceği varsayılsın. Yatırımcının varlığı $W$ ve i. yatırıma yatırım yaptığı zaman, varlığı $W + X$ olsun (i=1,2). Bu durumda yatırımcı,

$E\ [u\,(W + X_1)] > E\ [u\,(W + X_2)] \Rightarrow$ 1. yatırımı
$E\ [u\,(W + X_1)] < E\ [u\,(W + X_2)] \Rightarrow$ 2. yatırımı tercih eder
$E\ [u\,(W + X_1)] = E\ [u\,(W + X_2)] \Rightarrow$ ikisinden hangisini isterse seçebilir.

**Örnek:** $u(x) = -e^{-0.002x}$, $X_1 \sim N(10^4, 500^2)$ ve $X_2 \sim N(1.1(10^4), 2000^2)$ olduğuna göre yatırımcı hangi yatırımı tercih etmelidir?

$$E\ [u\ (W\ +\ X_1\ )] > E\ [u\ (W\ +\ X_2)] \quad ?$$

$$\begin{aligned} E\ [u\ (W\ +\ X_1\ )] &= E\left(-e^{-0.002(w+x_1}\right) = -e^{-0.002w} E(e^{-0.002x_1}) \\ &= -e^{-0.002w} M_{X_1}(-0.002) \end{aligned}$$

$$\left\{X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow\ M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\right\}$$

$$\begin{aligned} &= -e^{-0.002w} e^{-10^4(0.002)+\frac{1}{2}500^2(0.002)^2} \\ &= -e^{-0.002w} e^{-19.5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\ [u\ (W\ +\ X_2\ )] &= E\left(-e^{-0.002(w+x_2}\right) = -e^{-0.002w} E(e^{-0.002x_2}) \\ &= -e^{-0.002w} M_{X_2}(-0.002) \\ &= -e^{-0.002w} e^{-1.1(10^4)(0.002)+\frac{1}{2}2000^2(0.002)^2} \\ &= -e^{-0.002w} e^{-14} \end{aligned}$$

$\Rightarrow E\ [u\ (W\ +\ X_1\ )] > E\ [u\ (W\ +\ X_2\ )]$ olduğundan 1. yatırım tercih edilir.

**Not:** $\vartheta(x) = au(x) + b, a > 0,\ \ a, b$ sabit

$$\begin{aligned} E\ [u\ (W\ +\ X_1\ )] > E\ [u\ (W\ +\ X_2)] \Leftrightarrow\ & aE\ [u\ (W\ +\ X_1\ )] + b \\ & > a\,E\ [u\ (W\ +\ X_2)] + b \end{aligned}$$

## 2.3 Jensen Eşitsizliği

$u$ konkav bir fonksiyon iken bu fonksiyonun beklenen değeri her zaman için bu değişkenin beklenen değerinin fayda fonksiyonundan küçüktür yada eşittir.

$$E[u(x)] \leq u[E(x)]$$

**Max Prim-Min Prim**

$X$ rastgele kayıp, $w$ kişinin varlığını göstersin. Kişi bu $X$ kaybına karşı tam koruma istesin. Kişinin bu koruma için ödediği maksimum prim P olsun. O halde sigorta yaptıran açısından ödeyeceği maksimum prim aşağıdaki eşitlik yardımıyla bulunur:

$$u(w - \mathrm{P}) = E[u(w - X)]$$

Benzer şekilde sigorta şirketi açısından da bakılabilir. Sigorta şirketinin fayda fonksiyonu $\vartheta$, varlığı $w$ olsun. Bir kişinin sigorta şirketinden $X$ rastgele kaybına karşı tam koruma istediğini varsayalım. Sigorta şirketi açısından bu koruma için kabul edilebilir min prim Π aşağıdaki eşitlik yardımıyla bulunur:

$$\vartheta(w) = E[\vartheta(w + \Pi - X)]$$

**Örnek:** Bir sigorta şirketi $X$ riskini alıyor ve prim topladıktan sonra $w = 100$ varlığa sahip oluyor. Bu sigorta şirketi riskin tamamını bir reasürans şirkete devretmek istiyor. Fayda fonksiyonu $u(w) = \log(w)$ ve $P(X = 0) = P(X = 36) = 0.5$ olduğunda sigorta şirketinin reasüransa ödeyebileceği maksimum prim nedir?

**Çözüm:**

$$u(w - \mathrm{P}) = E[u(w - X)]$$
$$\log(w - \mathrm{P}) = E[\log(w - X)]$$
$$\log(100 - \mathrm{P}) = 0.5\log(100 - 0) + 0.5\log(100 - 36)$$
$$\log(100 - \mathrm{P}) = 0.5\log(100) + 0.5\log(64)$$
$$\log(100 - \mathrm{P}) = 0.5[\log(100) + \log(64)]$$
$$\log(100 - \mathrm{P}) = 0.5[\log(6400)]$$
$$\log(100 - \mathrm{P}) = \log(6400)^{0.5}$$
$$100 - \mathrm{P} = 80$$
$$\Rightarrow \mathrm{P} = 20$$