1.5.2 Konvolüsyon

$X_i, i = 1,2,\dots,n$ negatif değerler almayan kesikli bir rastgele değişken olsun. Bu durumda S_n de negatif değerler almayan bir rastgele değişken olur.

$S_2 = X_1 + X_2$

$P(S_2 \leq x) =?$

$S_2 = X_1 + X_2 = x$ olsun. Bu durumda X_2, j değerini $0 \leq j \leq x,\ X_1, x - j$ değerini alır. (X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız)

$$P(S_2 \leq x) = \sum_{j=0}^{x} P(X_1 \leq x - j) P(X_2 = j)$$

$S_3 = S_2 + X_3$ (S_2 ve X_3 bağımsızdır)

$$P(S_3 \leq x) = \sum_{j=0}^{x} P(S_2 \leq x - j) P(X_3 = j)$$

ve genel olarak

$$P(S_n \leq x) = \sum_{j=0}^{x} P(S_{n-1} \leq x - j) P(X_n = j) \qquad (1)$$

biçiminde elde edilir.

$$P(S_n = x) = \sum_{j=0}^{x} P(S_{n-1} = x - j) P(X_n = j)$$

X_1'in dağılım fonksiyonu F ve $f_j = P(X_1 = j)$ olsun.

$$F^{n*}(x) = P(S_n \leq x) \qquad \text{(n katlı konvolüsyon)}$$

Bu durumda (1) eşitliği

$$F^{n*}(x) = \sum_{j=0}^{x} F^{(n-1)*}(x - j)\, f_j$$

olur. Burada $F^{1*} = F$ ve $F^{0*}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ dır.

Benzer şekilde $f^{n*}(x) = P(S_n = x)$ olarak tanımlanırsa

$$f^{n*}(x) = \sum_{j=0}^{x} f_{x-j}^{(n-1)*} f_j$$

olur. Burada $f^{1*} = f$ 'dir.

F, $(0, \infty)$da sürekli bir dağılım olduğunda n katlı konvolüsyonlar aşağıdaki gibi yazılır:

$$F^{n*}(x) = \int_0^x F^{(n-1)*}(x-y)\, f(y)dy$$

ve

$$f^{n*}(x) = \int_0^x f^{(n-1)*}(x-y)\, f(y)dy$$

Örnek: $\{X_i\}_{i=1}^{n}$rastgele değişkenleri birbirinden bağımsız ve ortalaması $1/\lambda$ olan üstel dağıma sahiptir. S_n'nin dağılımı nedir?

Çözüm: $n = 2$ olsun.

$$\begin{aligned} f^{2*}(x) &= \int_0^x f(x-y)\, f(y)dy = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda(x-y)} \lambda e^{-\lambda y} dy \\ &= \lambda^2 \int_0^x e^{-\lambda x + \lambda y - \lambda y}\, dy = \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x 1\, dy \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda x} x \end{aligned}$$

$\Longrightarrow S_2 = X_1 + X_2 \sim \gamma(2, \lambda)$

$n = 3$ olsun. $S_3 = S_2 + X_3$

$$f^{3*}(x) = \int_0^x f^{2*}(x-y)\, f(y)dy = \int_0^x f^{2*}(y)\, f(x-y)dy$$

$$= \int_0^x \lambda^2\, e^{-\lambda y} y \lambda e^{-\lambda(x-y)} dy = \lambda^3 \int_0^x e^{-\lambda y - \lambda x + \lambda y}\, y dy$$

$$= \lambda^3 e^{-\lambda x} \int_0^x y\, dy = \frac{1}{2}\lambda^3 e^{-\lambda x} x^2$$

$\Longrightarrow S_2 \sim \gamma(3, \lambda)$ olur. O halde n için $S_n \sim \gamma(n, \lambda)$ ‘dir.

1.5.3 Kesikli Rastgele Değişkenler için Ardışık Yineleme

X_1 kesikli ve negatif olmayan değerler alan bir rastgele değişken olsun. Ardışık olarak S_n’nin olasılık fonksiyonunu hesaplamak mümkündür.

$$f_j = P(X_1 = j) \text{ ve } g_j = P(S_n = j), \quad j = 0,1,2, \dots$$

X_1 ‘in olasılık üreten fonksiyonu P_X ,

$$P_X(r) = \sum_{j=0}^{\infty} r^j\, f_j$$

S_n’nin olasılık üreten fonksiyonunu P_S

$$P_S(r) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k\, g_k$$

ile gösterilsin. Moment çıkaran fonksiyondaki gibi aralarındaki ilişkiden

$$P_S(r) = [P_X(r)]^n$$

yazılır. r’ye göre türev alınırsa

$$P_S{}'(r) = n[P_X(r)]^{n-1} P_X{}'(r)$$

elde edilir. Her iki taraf $rP_X(r)$ ile çarpılırsa,

$$rP_X(r)P_S{}'(r) = rP_X(r)n[P_X(r)]^{n-1}P_X{}'(r)$$
$$= nr[P_X(r)]^nP_X{}'(r)$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} r^j f_j \;\; r\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1}g_k = n\sum_{k=0}^{\infty} r^k g_k \;\; r\sum_{j=0}^{\infty} jr^{j-1}f_j$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} r^j f_j \;\; \sum_{k=1}^{\infty} kr^k g_k = n\sum_{k=0}^{\infty} r^k g_k \;\; \sum_{j=1}^{\infty} jr^j f_j$$

g_x ifadesini bulabilmek için yukarıdaki eşitliğin her iki tarafında r^xkatsayısı elde edilsin. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra yukarıdaki ifade,

$$xg_xf_0 + \sum_{j=1}^{x-1}(x-j)f_jg_{x-j} = n\sum_{j=1}^{x} jf_jg_{x-j}$$

olur. Buradan g_x çekilirse,

$$g_x = \frac{1}{f_0}\sum_{j=1}^{x}\left[(n+1)\frac{j}{x} - 1\right]f_jg_{x-j}$$

olarak elde edilir. Burada $g_0 = f_0{}^n$ ‘dir.

Örnek: $\{X_i\}_{i=1}^4$rastgele değişkenleri birbirinden bağımsız aynı dağılımlıdır. Olasılık fonksiyonu $f_j = P(X_1 = j)$

$$f_0 = 0.4 \qquad f_1 = 0.3 \qquad f_2 = 0.2 \qquad f_3 = 0.1$$

ile verilsin. $S_4 = \sum_{i=1}^4 X_i$ olsun. Ardışık olarak $P(S_4 = r),\ r = 1,2,3,4$ hesaplayınız.

Çözüm:

$$g_0 = P(S_4 = 0) = f_0{}^4 = (0.4)^4 = 0.0256$$

$f_j = 0,\ \ j = 4,5,6,\ldots$

$$g_x = \frac{1}{f_0}\sum_{j=1}^{x}\left[\frac{5j}{x} - 1\right]f_jg_{x-j}$$

$$g_1 = \frac{1}{f_0}\sum_{j=1}^{1}\left[\frac{5j}{1} - 1\right] f_j g_{1-j} = \frac{1}{f_0}\left(\frac{(5)(1)}{1} - 1\right) f_1 g_0 = \frac{1}{f_0} 4 f_1 g_0 = 0.0768$$

$$g_2 = \frac{1}{f_0}\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{5j}{2} - 1\right] f_j g_{2-j} = \frac{1}{f_0}\left[\left(\frac{5}{2} - 1\right) f_1 g_1 + (5-1) f_2 g_0\right] = 0.1376$$

$$g_3 = \frac{1}{f_0}\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{5j}{3} - 1\right] f_j g_{3-j} = \frac{1}{f_0}\left[\left(\frac{5}{3} - 1\right) f_1 g_2 + \left(\frac{10}{3} - 1\right) f_2 g_1 + \left(\frac{15}{3} - 1\right) f_3 g_0\right] = 0.1840$$

$$g_4 = \frac{1}{f_0}\sum_{j=1}^{4}\left[\frac{5j}{4} - 1\right] f_j g_{4-j} = \frac{1}{f_0}\left[\left(\frac{5}{4} - 1\right) f_1 g_3 + \left(\frac{10}{4} - 1\right) f_2 g_2 + \left(\frac{15}{4} - 1\right) f_3 g_1 + 5 f_4 g_0\right] = 0.1905$$