2.4 Fayda Fonksiyonu Türleri

w 'nun farklı düzeylerine farklı değerler alarak fayda fonksiyonu oluşturmak mümkündür. Matematiksel fonksiyonlar yardımıyla oluşturulan fayda fonksiyonlarını kullanmak daha kolaydır. Aşağıda fayda fonksiyonları olarak bazı matematiksel fonksiyonlar verilmiştir.

2.4.1 Üstel Fayda Fonksiyonu

$$u(x) = -exp\{-\beta x\}, \qquad \beta > 0$$

Bu fayda fonksiyonunun önemli bir özelliği bireyin varlığına(w) bağlı olmayan bir karar yapısına sahiptir.

Üstel fayda fonksiyonunu kullanarak karar vermenin önemli özelliği moment çıkaran fonksiyonları arasında karşılaştırma yaparak karara ulaşmasıdır.

$u(x) = -exp\{-\beta x\}$ fonksiyonuna sahip bir bireyin rastgele X kaybına karşı kendini sigortalamak için ödeyebileceği maksimum prim

$$\mathrm{P} = \beta^{-1} \log M_X(\beta)$$

olur.

Örnek: $X \sim \gamma(2, 0.01)$ olsun. Kişi kararı üstel fayda fonksiyonuna dayanarak verecektir. Sigorta şirketinin istediği prim 208'dir. Kişi bu primi kabul etmeli midir?

Çözüm: $X \sim \gamma(2, 0.01)$ olduğundan X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha}$ dır. Kişinin kabul edebileceği maksimum prim,

$$\mathrm{P} = \beta^{-1} \log M_X(\beta) = \frac{1}{\beta} \log\left(\frac{\lambda}{\lambda - \beta}\right)^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{0.001} \log\left(\frac{0.01}{0.01 - 0.001}\right)^{2} = 210.72$$

olduğundan 208 birim kabul edilmelidir.

2.4.2 Karesel Fayda Fonksiyonu

$$u(x) = x - \beta x^2, \qquad x < \frac{1}{2\beta}, \qquad \beta > 0$$

Örnek: X rastgele hasar için $E(X) = Var(X) = 100$ ve $P(X > 0 = 1)$ olsun. $u(x) = x - 0.001x^2$ fayda fonksiyonu kullanarak $w = 100$ için minimum primi bulunuz.

Çözüm:

$$u(w) = E[u(w + \Pi - X)]$$

$$u(100) = E[u(100 + \Pi - X)]$$

$$u(100) = 100 - 0.001(100)^2 = 90$$

$$\begin{aligned}
&E[u(100 + \Pi - X)] \\
&= E[100 + \Pi - X - 0.001(100 + \Pi - X)^2] \\
&= E\big[100 + \Pi - X - 0.001[(100 + \Pi)^2 + 2X(100 + \Pi) + \mathrm{X}^2]\big] \\
&= E[100 + \Pi - X - 0.001(100 + \Pi)^2 + 0.002X(100 + \Pi) + 0.001\mathrm{X}^2] \\
&= 100 + \Pi - E(X) - 0.001(100 + \Pi)^2 + 0.002E(X)(100 + \Pi) + 0.001\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) \\
&= 100 + \Pi - 100 - 0.001(100 + \Pi)^2 + 0.002(100)(100 + \Pi) + 0.001(10100) \\
&= \Pi - 100 - 0.001\Pi^2 - 0.1
\end{aligned}$$

$u(100) = E[u(100 + \Pi - X)]$olduğundan

$$90 = \Pi - 100 - 0.001\Pi^2 - 0.1$$

$$\Rightarrow \Pi^2 - 1000\Pi + 90100 = 0$$

$$\Pi = 100.13$$

2.4.3 Logaritmik Fayda Fonksiyonu

$$u(x) = \beta \log x\,, \qquad x > 0, \qquad \beta > 0$$

Örnek: Bir yatırımcı logaritmik fayda fonksiyonu temelinde n tane şirket hissesinden birine yatırım yapacaktır. Yatırımcı B varlığına sahiptir ve i. şirket hissesine yatırım yaptığı zaman varlığı BX_i, $i = 1,2,\dots,n$ olacaktır. Yatırım kararının B 'den bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $E[u(BX_i)] > E\left[u(BX_j)\right]$ olduğunda i. şirket hissesine yatırım yapılacaktır.

$$\begin{aligned} E[u(BX_i)] &= E[\beta \log(BX_i)] = \beta E[\log(BX_i)] \\ &= \beta E[\log(B) + \log(X_i)] \\ &= \beta E[\log(B)] + \beta E[\log(X_i)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[u\left(BX_j\right)\right] &= E\left[\beta \log(BX_j)\right] = \beta E\left[\log\left(BX_j\right)\right] \\ &= \beta E\left[\log(B) + \log\left(X_j\right)\right] \\ &= \beta E[\log(B)] + \beta E\left[\log\left(X_j\right)\right] \end{aligned}$$

$$E[u(BX_i)] = \beta E[\log(B)] + \beta E[\log(X_i)] > \beta E[\log(B)] + \beta E\left[\log\left(X_j\right)\right] = E\left[u\left(BX_j\right)\right]$$

$$E[\log(X_i)] > E\left[\log\left(X_j\right)\right]$$

olduğunda i. şirket hissesine yatırım yapacak. Bu durum B'den bağımsızdır.

2.4.4 Üssel Fayda Fonsiyonu

$$u(x) = x^{\beta}, \qquad x > 0, \qquad 0 < \beta < 1$$

Örnek: Rastgele kayıp $X \sim U(0{,}200)$ dağılımına sahiptir. Yatırımcı $Y = \min(X, 100)$ ile bu kayba karşı kısmi sigorta yaptırıyor(hasar 100'den küçükse kişi hasarı ödeyecek, 100'den büyükse 100 ödeyecek). Yarar fonksiyonu $u(x) = x^{2/5}$ ile kişi bu kısmi sigorta için 80 birim para ödesin mi?($w = 100$)

Çözüm:

$$E[u(300 - X)] \le E[u(300 - 80 - Y)]$$

$$\begin{aligned} E[u(300 - X)] &= E\left[(300 - X)^{2/5}\right] \\ &= \int_0^{200} (300 - x)^{2/5} \frac{1}{200} dx \\ &= \frac{1}{200} \int_0^{200} (300 - x)^{2/5} dx = 8.237 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[u(300 - 80 - Y)] &= E\left[(220 - Y)^{2/5}\right] \\ &= \int_0^{100} (220 - x)^{2/5} \frac{1}{200} dx + \int_{100}^{200} (120)^{2/5} \frac{1}{200} dx \\ &= \frac{1}{200}\left[\int_0^{100} (220 - x)^{2/5} dx + \int_{100}^{200} (120)^{2/5} dx\right] = 7.280 \end{aligned}$$

$$E[u(300 - X)] = 8.237 > E[u(300 - 80 - Y)] = 7.280$$

olduğundan 80 birim ödemeyi kabul etmemelidir.