4.2 Bileşik Poisson Dağılımı

$X_1, X_2, \ldots, X_N$ hasar miktarları, $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ toplam hasar miktarını göstermek üzere N'nin dağılımı λ parametreli Poisson olduğunda S'nin dağılımı "Bileşik Poisson" olmaktadır.

Koşullu beklenen değer ve varyansın formülü

$$E(S) = E(N)E(X)$$
$$Var(S) = E(N)Var(X) + Var(N)[E(X)]^2$$

idi. O halde Bileşik Poisson dağılımı için beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi olur:

$$E(S) = \lambda m_1$$
$$Var(S) = \lambda(m_2 - {m_1}^2) + \lambda {m_1}^2 = \lambda m_2$$

Çarpıklık katsayısı ise

$$S_k(s) = \frac{E[(S - \lambda m_1)^3]}{Var(S)^{3/2}} = \frac{\lambda m_3}{(\lambda m_2)^{3/2}}$$

Örnek: S'nin dağılımı Bileşik Poisson ($\lambda = 100$), hasar miktarının dağılımı $Pareto\ (4, 1500)$ olsun. $E(S) =?$ $Var\ (S) =?$ $S_k(s) =?$

Çözüm: $X \sim Pareto(\alpha, \beta)$

$m_1 = E(X) = \frac{\beta}{\alpha-1}$ $\quad m_2 = E(X^2) = \frac{2\beta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$ $\quad m_3 = E(X^3) = \frac{6\beta^3}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}$

$$E(S) = \lambda m_1 = 100 \frac{1500}{3} = 50000$$

$$Var(S) = \lambda m_2 = 100 \frac{2(1500)^2}{(3)(2)} (7.5)10^7$$

$$E[(S - \lambda m_1)^3] = \lambda m_3 = 100. \frac{6(1500)^3}{(3)(2)(1)} = (1.5)^3 10^{11}$$

$$S_k(s) = \frac{\lambda m_3}{(\lambda m_2)^{3/2}} = 0.5196$$

4.3 Reasüransın Etkisi

Toplam hasar miktarı sigorta şirketi ve reasüransın hasar miktarları toplamından oluşur.

$$S = S_I + S_R$$

Burada S_I, sigorta şirketinin toplam hasar miktarını S_R, reasüransın toplam hasar miktarını göstermektedir.

4.3.1 Oransal Reasürans

Sigorta şirketi her bir hasar a oranını, reasürans şirketi ise $(1 - a)$ oranını öder.

$$S_I = \sum_{i=1}^{N} aX_i = aS \qquad \{S = 0 \text{ ise } S_I = 0 \text{ olur}\}$$

$$S_R = (1 - a)S$$

Örnek: Bir riskin toplam hasarlarının dağılımı $\lambda = 100$ olan *Bileşik Poisson* olsun. Bireysel hasar miktarlarının dağılımı ortalaması 1000 olan üsteldir.$a = 0.8$ ile oransal reasürans anlaşması yapılıyor. S_R'nin dağılımını bulunuz.

Çözüm: Reasürans her hasarın %20 sini öder. S_R'nin dağılımı100 parametreli *Poisson* ve bireysel hasar miktarları ortalaması 200 olan üsteldir.

4.3.2 XL Reasürensı (Aşan Kayıp Reasüransı)

S toplam hasar, M retenşın sınırı olsun.

$$S_I = \sum_{i=1}^{N} \min(X_i, M), \quad N = 0 \text{ olduğunda } S_I = 0$$
$$S_R = \sum_{i=1}^{N} \max(0, X_i - M), \quad N = 0 \text{ olduğunda } S_R = 0$$

$S_R, N > 0$ olduğu zamanlarda bile sıfır olabilir. Eğer meydana gelen $n > 0$ hasarının hepsi M miktarının altındaysa, tüm hasarlar sigorta şirketi tarafından ödenir.

Reasüransın toplam hasarı iki yöntemle ele alınabilir.

Birincisi $S_R = \sum_{i=1}^{N} \max(0, X_i - M)$ ile reasüransın hasar miktarının sıfır olmasının mümkün olduğu durum, ikincisi M'yi aşan hasarları göz önüne alarak reasürans için sıfır ödeme olmaması durumu. İkinci durumda reasüransın sıfır olmayan hasar ödemelerinin toplamı

$$S_R = \sum_{i=1}^{N_R} \hat{X}_i \ , \quad (N_R = 0 \text{ olduğunda } S_R = 0)$$

Burada

N_R: Reasürans için sıfırdan farklı ödemelerin sayısı

$\hat{X}_i$:Reasürans tarafından ödenen *i*. hasar miktarı

$\hat{X}_i$'nin dağılımı

$$P(\hat{X}_i \le x) = \frac{F(x+M) - F(M)}{1 - F(M)}$$

ile bulunur.

N_R'nin dağılımı ise aşağıdaki gibi bulunur:

$\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip gösterge fonksiyonu olsun.

$$I_j = \begin{cases} 0, & x_j \le M \\ 1, & x_j > M \end{cases} \qquad j = 1,2,\ldots$$

$$P(I_j = 1) = P(X_j > M) = 1 - F(M) = \Pi_M$$

ve

$$N_R = \sum_{j=1}^{N} I_j \quad (\mathrm{N} = 0 \text{ olduğunda } N_R = 0)$$

olduğundan N_R bileşik bir dağılıma sahiptir. Olasılık çıkaran fonksiyonu

$$P_{N_R}(r) = P_N[P_I(r)]$$

olarak yazılır. Burada,

P_I: Her bir indikatör rastgele değişkenin olasılık çıkaran fonksiyonudur.

Örnek: $N \sim Poisson(\lambda)$ olduğunda N_R 'nin dağılımı nedir?

Çözüm:

$$P_N(r) = exp\{\lambda(r-1)\}$$

$$P_{N_R}(r) = exp\{\lambda(1 - \Pi_M + \Pi_M r - 1)\} = exp\{\lambda\Pi_M(r-1)\}$$

O halde

$$N_R \sim Poisson(\lambda\Pi_M)$$

olur.

Örnek: Toplam hasar dağılımı *Bileşik Poisson* olsun. Poisson parametresi $\lambda = 200$, bireysel hasarların dağılımı $Pareto(3{,}300)$ olsun. $M = 300$ için aşan kayıp reasürans anlaşması(XL) yapıldığında reasürans için ortalama ve varyansı bulunuz.

Çözüm: İki yöntemle çözülebilir.

Yöntem 1

Bu yöntemde S_R , $\lambda = 200$ parametreli bileşik dağılıma sahiptir. Bireysel hasar miktarları $\max(0, X-300)$, $X \sim Pareto(\alpha = 3, \lambda^* = 300)$.

$f(x) = \frac{\alpha {\lambda^*}^{\alpha}}{(\lambda^*+x)^{\alpha+1}}$, $x > 0,\ \alpha > 0,\ \lambda^* > 0$ ve $F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda^*}{\lambda^*+x}\right)^{\alpha}$, $x > 0$ 'dir.

$$E(S_R) = \lambda E[\max(0, X-300)] = 200E[\max(0, X-300)]$$

$$= 200 \int_{300}^{\infty} (x-300)\frac{3(300)^3}{(300+x)^4}dx$$

$$\left\{\begin{matrix} x-300 = u & x = 300\ için\ u = 0 \\ dx = du & x = \infty\ \ için\ u = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$= 200 \int_{0}^{\infty} u\frac{3(300)^3}{(u+600)^4}du = \frac{200}{2^3}\int_{0}^{\infty} u\frac{3(600)^3}{(u+600)^4}du$$

$\alpha = 3$, $\lambda = 600$ olan Pareto dağılımının beklenen değeri $E(X) = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{600}{2}$

$$= \frac{200}{2^3}\frac{600}{2} = 7500$$

$$Var(S_R) = \lambda E[(\max(0, X - 300))^2]$$

$$= 200 \int_{300}^{\infty} (x - 300)^2 \frac{3(300)^3}{(300 + x)^4} dx$$

$$\begin{Bmatrix} x - 300 = u & x = 300 \text{ } için \text{ } u = 0 \\ dx = du & x = \infty \text{ } için \text{ } u = 0 \end{Bmatrix}$$

$$= 200 \int_{0}^{\infty} u^2 \frac{3(300)^3}{(u + 600)^4} du = \frac{200}{2^3} \int_{0}^{\infty} u^2 \frac{3(600)^3}{(u + 600)^4} du$$

$\alpha = 3\,, \lambda = 600$ olan Pareto dağılımının ikinci momenti

$$E(X^2) = \frac{2\lambda^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} = \frac{2(600)^2}{(2)(1)}$$

Yöntem 2

S_R , $200[1 - F(300)] = 200.\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 25$ Poisson parametreli *Bileşik Poisson* dağılmaktadır. Bireysel hasar miktarları

$$P(\hat{X} \leq x) = \frac{F(x + 300) - F(300)}{1 - F(300)}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{300}{300 + x + 300}\right)^3 - 1 + \left(\frac{300}{600}\right)^3}{\left(\frac{300}{600}\right)^3}$$

$$= 1 - \left(\frac{600}{x + 600}\right)^3$$

$$\hat{X} \sim Pareto(3{,}600)$$

olur. Bu durumda

$$E(S_R) = 25E(\hat{X}) = 25\frac{600}{2} = 7500$$

$$Var(S_R) = 25E\left(\hat{X}^2\right) = 25\frac{2(600)^2}{(2)(1)} = 9.10^6$$

olarak elde edilir.