4.4 Toplam Hasar Dağılımının Ardışık Hesaplanması

Bireysel hasar miktarları negatif olmayan tam sayı ve hasar sayısı dağılımı $(a,\ b,0)$ dağılım sınıfına sahip olduğunda toplam hasar miktarının dağılımı Panjer Yineleme formülünü kullanılarak hesaplanabilir.

4.4.1 (a,b,0) Sınıfı Dağılımlar

Negatif olmayan kesikli dağılımılar sınıfına ait olan Binom, geometrik, negatif binom ve poisson dağılımları aktüerya literatüründe $(a,\ b,0)$ sınıfı dağılımları olarak adlandırılırlar.

Tanım: Negatif olmayan kesikli rastgele değişken X, eğer olasılık fonksiyonu aşağıdaki yenileme formülünü sağlıyorsa $(a,\ b,0)$ sınıfına aittir, denir:

$$f(x) = \left(a + \frac{b}{x}\right) f_X(x-1), \qquad x = 1,2,\dots$$

Burada a ve b sabit, ve $f_X(0)$ başlangıç değeri verilir.

Aşağıdaki tabloda $(a,\ b,0)$ sınıfı dağılımların a ve b değerleri ile $f_X(0)$ başlangıç değerleri verilmiştir.

Tablo: $(a,\ b,0)$ sınıfı dağılımlar

Dağılım	a	b	$f_X(0)$
Binom; $B(n,q)$	$-\frac{q}{1-q}$	$\frac{(n+1)q}{1-q}$	$(1-q)^n$
Poisson; $P(\lambda)$	0	λ	$e^{-\lambda}$
Negatif Binom; $NB(k,p)$	$1-p$	$(1-p)(k-1)$	p^k
Geometrik; $GM(p)$	$1-p$	0	p

4.4.2 Panjer Yineleme Formülü

Panjer indirgeme formülü risk teorisinde en önemli sonuçlardan bir tanesidir. Sadece toplam hasarın dağılımda değil, aynı zamanda iflas teorisinde de kullanılır.

Bu indirgeme formülü ile hasar sayısı (a,b,0) sınıfına ait bir dağılıma sahip ve bireysel hasar miktarının dağılımı $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$ biçimde kesikli olduğunda, toplam hasarın olasılık fonksiyonu hesaplanır.

Bireysel hasar miktarının negatif olmayan tam sayı değerler olan bir dağılım olduğunu varsayılsın. S'de negatif olmayan tam değerler alan bir dağılım olur.

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$S = 0 \Rightarrow (N = 0)$ veya $N = n \; ve \; S = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$

$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow$ her bir hasar $X_i = 0$

X_i'ler bağımsız olduğundan

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = 0\right) = f_0^n$$

$$g_0 = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n . f_0^n = P_N(f_0)$$

S'nin olasılık fonksiyonu

$$P_S(r) = P_N[P_X(r)] \qquad (1)$$

$$P_S'(r) = P_N'[P_X(r)]P_X'(r) \qquad (2)$$

(*) ve (**) formülleri kulllanılarak

$$P_S'(r) = aP_X(r)P_S'(r) + (a+b)P_S(r)P_X'(r) \qquad (3)$$

elde edilir. P_S ve P_X olasılık çıkaran fonksiyonları aşağıdaki gibi verilir.

$$P_S(r) = \sum_{j=0}^{\infty} r^j g_j \;\; ve \;\; P_X(r) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k f_k$$

$$P_s'(r) = \sum_{j=0}^{\infty} j r^{j-1} g_j \;\; ve \;\; P_X'(r) = \sum_{k=0}^{\infty} k r^{k-1} f_k$$

(3) ifadesinde yerine koyulduğunda

$$\sum_{j=0}^{\infty} j r^{j-1} g_j = a \left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k f_k \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} j r^{j-1} g_j \right)$$

$$+(a+b) \left(\sum_{j=0}^{\infty} r^j g_j \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} k r^{k-1} f_k \right)$$

ifadesine ulaşılır. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra yukarıdaki ifade

$$x g_x = a \sum_{k=0}^{x} f_k (x-k) g_{x-k} + (a+b) \sum_{k=0}^{x} k f_k g_{x-k}$$

$$= a f_0 x g_x + a \sum_{k=1}^{x} f_k (x-k) g_{x-k} + (a+b) \sum_{k=0}^{x} k f_k g_{x-k}$$

$$= (1 - a f_0) x g_x = \sum_{k=1}^{x} (a(x-k) + (a+b)k) f_k g_{x-k}$$

biçiminde elde edilir. Buradan

$$\Rightarrow g_x = \frac{1}{1 - a f_0} \sum_{k=1}^{x} (a + \frac{bk}{x}) \, f_k g_{x-k}$$

olarak Panjer yenileme formülü elde edilmiş olur.

Örnek : $N \sim Poisson(2) \; ve \; f_j = 0.6(0.4)^{j-1}, \; j = 1,2,3 \dots \;, \;\; x = 0,1,2,3$ için g_x 'i hesaplayınız.

Çözüm:

$f_0 = 0\ ,\ g_0 = P_0 \Rightarrow\ a = 0,\ b = 2$

$$g_x = \frac{1}{1-af_0}\sum_{k=1}^{x}(a+\frac{bk}{x})\,f_k g_{x-k}$$

$a = 0,\ b = 2$ konulduğunda

$$g_x = \frac{2}{x}\sum_{k=1}^{x} k\, f_k g_{x-k}$$

$$g_0 = p_0 = e^{-2} = 0.1353$$

$$g_1 = 2f_1 g_0 = 0.1624$$

$$g_2 = f_1 g_1 + f_2 g_0 = 0.1624$$

$$g_3 = \frac{2}{3}(f_1 g_2 + 2f_2 g_1 + 3f_3 g_0) = 0.1429$$

S'nin dağılım fonksiyonu için bir ardışık hesaplama formülü bulunmaz.

İstisna: $N \sim Geometrik(p)$ $\qquad p_n = pq^n,\ n = 0,1,2,\ldots$

Bu durumda $a = q,\ b = 0\ ve$

$$g_x = \frac{1}{1-af_0}\sum_{k=1}^{x} f_k g_{x-k}$$

$$G(Y) = \sum_{x=0}^{y} g_x$$

$$g_0 + \frac{a}{1-af_0}\sum_{k=1}^{y} f_k G(y-k)$$

S'nin momentlerini Panjer indirgeme formülü ile bulabiliriz. $r = 1,2,3\ldots$

$$E[S^r] = \sum_{x=0}^{\infty} x^r g_x$$

$$= \frac{1}{1-af_0}\sum_{x=1}^{\infty} x^r \sum_{k=1}^{x}\left(a+\frac{bk}{x}\right) f_k g_{x-k}$$

$$= \frac{1}{1-af_0}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{x=k}^{\infty}(ax^r + bkx^{r-1}) f_k g_{x-k}$$

$$= \frac{1}{1-af_0}\sum_{k=1}^{\infty} f_k \sum_{x=k}^{\infty}(a(t+k)^r + bk(t+k)^{r-1}) g_t$$

Binom açılımı kullanılırsa,

$$= \sum_{t=0}^{\infty} (t+k)^r g_t = \sum_{t}^{\infty} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} t^i k^{r-i} \, g_t$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} k^{r-i} \sum_{t=0}^{\infty} t^i g_t$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} k^{r-i} \, E[S^i]$$

Böylelikle,

$$E[S^r] = \frac{1}{1-af_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \left[a \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} k^{r-i} \, E[S^i] + b_k \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} k^{r-1-i} E[S^i] \right]$$

$$= \frac{1}{1-af_0} \left[a \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} E[S^i] \sum_{k=1}^{\infty} k^{r-i} f_k + b \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} E[S^i] \sum_{k=1}^{\infty} k^{r-i} f_k \right]$$

$$= \frac{1}{1-af_0} \left[\sum_{i=0}^{r-1} \left[a \binom{r}{i} + b \binom{r-1}{i} \right] E[S^i] E[X_1^{r-1}] + aE[S^r] \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right]$$

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = 1 - f_0$ olduğundan,

$$E[S^r] = \frac{1}{1-a} \sum_{i=0}^{r-1} \left[a \binom{r}{i} + b \binom{r-1}{i} \right] E[S^i] E[X_1^{r-i}] \qquad (4)$$

Örnek: Poisson parametresi λ ve bireysel hasar müktarı negatifi olmayan tam sayılı değerler alan bileşik poisson dağılımının ilk üç momentini (4) eşitliğini kullanarak bulunuz.

Çözüm:

$$P(\lambda) \Rightarrow a = 0 \quad b = \lambda$$

$$E[S^r] = \lambda \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} E[S^i] E[X_1^{r-i}]$$

$r = 1$

$$E[S] = \lambda E[X_1]$$

$r = 2$

$$E[S^2] = \lambda(E[X_1^2] + E[S]E[X_1])$$
$$= \lambda E[X_1^2] + E[S]^2$$

$$\Rightarrow Var(S) = E[S^2] - \big[E[S]\big]^2$$
$$= \lambda E[X_1^2] + E[S]^2 - E[S]^2$$
$$= \lambda E[X_1^2]$$

$r = 3$

$$E[S^3] = \lambda(E[X_1^3] + 2E[S]E[X_1^2] + E[S^2]E[X_1])$$

$$= \lambda E[X_1^3] + 3E[S]E[S^2] - 2E[S]^3$$

$$\lambda E[X_1^3] = E[S^3] - 3E[S]E[S^2] + 2E[S]^3$$

$$= E[(S - E[S])^3]$$