## 3.3 Annüite Çeşitleri

Eşit zaman aralıklarında genellikle eşit miktarlardaki ödemeler serisine annüite denir. Buna günlük hayattan bir çok örnek verilebilir: İpotek ödemeleri maaşlar, emekli aylıkları, kira, alınan bir malın taksit ödemeleri ve hayat sigortası primleri gibi.

Annüiteler genel olarak ikiye ayrılır.

**1) Garantili Annüite(Annuities Certain)(Zorunlu Annüite)**

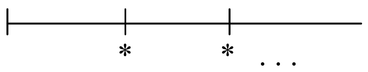
Ödemeler sabit bir sayıda yapılır. Örnek olarak bir televizyonun 2 yıl boyunca düzenli olarak taksit ödemesi

**2) Şartlı Annüite( Contingent Annuity)**

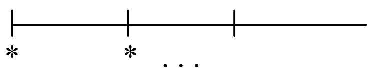
Burada ödelerin devamı bir olayın oluşuna yada olmayışına bağlıdır. Örnek olarak yaşama şartına bağlı annüite. Burada kişi yaşadığı sürece ödeme yapılır, yani primlerin devamlılığı sigortalının yaşama şartına bağlıdır. Bir başka örnek ise bir sigorta şirketinin özürlü birine yaptığı ödemelerdir. Bu kişi yaşadığı ve özürlü olduğu sürece ödeme yapılır.

Annüiteler ödeme şekline göre ikiye ayrılır.

**1) Dönem Sonu Annüite (Annuities Immediate):** Ödemeler her bir aralığın sonunda yapılır. Örnek olarak işçilerin maaşları verilebilir.



**2) Dönem Başı Annüite (Annuities Due):** Ödemeler her bir aralığın başında yapılır. Örnek olarak kira ödemesi, memur maaşları verilebilir.



## 3.4 Dönem Sonu Annüitede Birikimli Değer

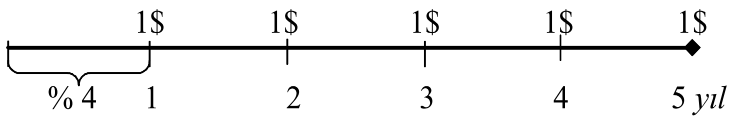
$i$, her dönem(periyot) için faiz oranı olmak üzere, $n$ dönem(periyot) sonunda birikimli değer,

$$s_{n\rceil i}$$

ile gösterilir.

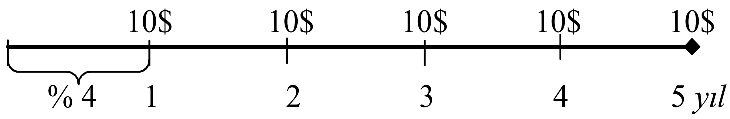
Örneğin her biri 1\$ olan ve 5 yıl yapılan ödemeler serisi göz önüne alınsın ve faiz oranı % 4 olsun. 5 yıl sonundaki birikimli değer hesaplansın.

Çizgi diyagramı

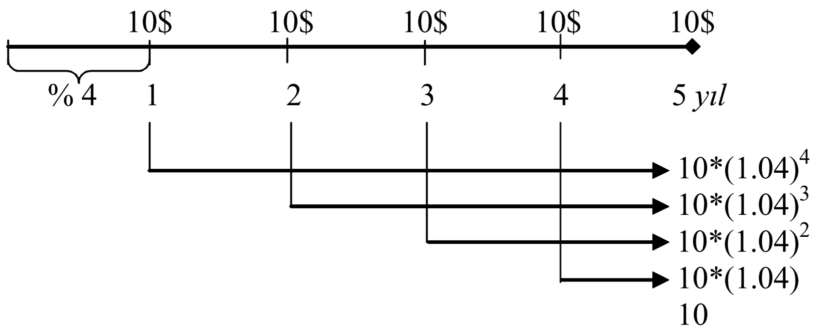



şeklindedir. Birikimli değer $S = 1 * s_{5\rceil\%4} = s_{5\rceil\%4}$ 'dir.

Eğer her bir ödeme 10\$ olursa, çizgi diyagramı aşağıdaki gibi çizilir.




Bu durumda birikimli değer $S = 10 * s_{5\rceil\%4}$ 'dir.



Yukarıdaki çizgi diyagramında birikimli değerin nasıl hesaplandığı görülmektedir. Buna göre birikimli değer

$$\begin{aligned} S &= 10 * (1.04)^4 + 10 * (1.04)^3 + 10 * (1.04)^2 + 10 * (1.04)^1 + 10 \\ &= 10 * \left[(1.04)^4 + (1.04)^3 + (1.04)^2 + (1.04)^1 + 1\right] \\ &= 10 * (5.416323) \\ &= 54.16\$ \end{aligned}$$

dir.

$$s_{n\rceil i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + (1+i)^2 + (1+i)^1 + 1$$

Tablo I de değişik faiz oranları için $s_{n\rceil i}$ ler bulunmaktadır. O halde birikimli değer Tablo I kullanılarak tekrar hesaplanırsa,

$$\textit{Birikimli Değer} = 10 * s_{5\rceil \%4} = 10 * 5.416323 = 54.16\$$$

şeklinde elde edilir. Burada Tablo I de $s_{5\rceil \%4} = 5.416323$ olarak verilmiştir.

### 3.4.1 $\mathbf{s_{n\rceil i}}$ tablolarının kullanımı ve yapısı

$s_{1\rceil i} = 1$ dir.

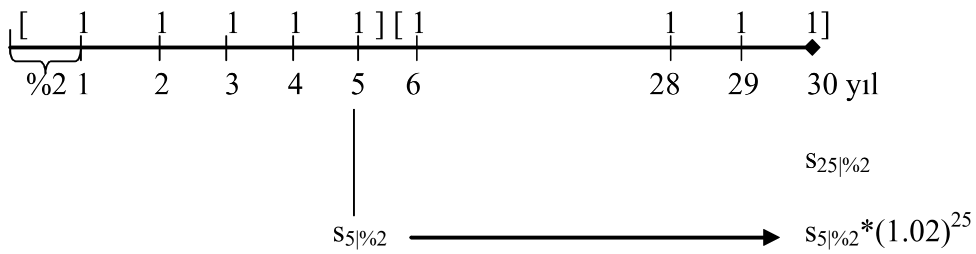
$i = 0.05$ olarak alındığında, aralarındaki ilişki aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned} s_{1\rceil \%5} &= 1 \\ s_{2\rceil \%5} &= s_{1\rceil \%5} + (1.05) \\ s_{3\rceil \%5} &= s_{2\rceil \%5} + (1.05)^2 \\ s_{4\rceil \%5} &= s_{3\rceil \%5} + (1.05)^3 \\ &... \end{aligned}$$

Eğer $n > 25$ ise

$$s_{n\rceil i} = s_{25\rceil i} + s_{n-25\rceil i}(1+i)^{25}$$

dir. Örneğin $n = 30$ yıl olduğunda çizgi diyagramı




Birikimli değeri

$$s_{30\rceil \%2} = s_{25\rceil \%2} + s_{5\rceil \%2}(1.02)^{25}$$

dir.

**Örnek:** $s_{35\rceil \%4} = ?$

$$s_{n\rceil i} = s_{25\rceil i} + s_{n-25\rceil i}(1+i)^{25}$$

$n = 35, \quad i = 0.04$

$$s_{35\rceil \%4} = s_{25\rceil \%4} + s_{10\rceil \%4}(1.04)^{25}$$

Tablo I ' den $s_{25\rceil \%4} = 41.645908$
$s_{10\rceil \%4} = 12.006107$
$(1.04)^{25} = 2.665836$

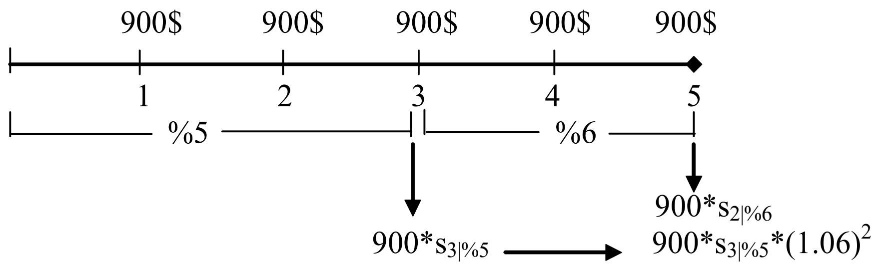
Bu ifadeler formülde yerine konursa,

$$\begin{aligned} s_{35\rceil \%4} &= 41.645908 + 12.006107 * 2.665836 \\ &= 73.652220 \end{aligned}$$

elde edilir.

Bazen bir periyot sonunda faiz oranı değişir. Bu durumda birikimli değerin nasıl hesaplanacağı aşağıdaki örnekle verilmiştir.

**Örnek**: Bir sigorta şirketi her yıl sonunda 900$ yatırım yapıyor. İlk 3 yıl için faiz oranı %5 sonraki yıllar için %6 dır. 5 yıl sonunda sigorta şirketinin birikimli değeri ne olur?




Buna göre birikimli değer,

$$900 * s_{3\rceil\%5} * (1.06)^2 + 900 * s_{2\rceil\%6}$$

olarak yazılır. Tablo I 'i kullanarak değerler yerine yazıldığında birikimli değer

$$900 * 3.152500 * (1.123600) + 900 * (2.060000) = 5041.93\$$$

dır.

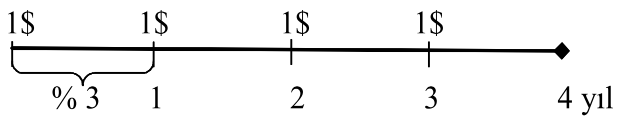
### 3.5 Dönem Başı Annüitede Birikimli Değer

$i$, her dönem(periyot) için faiz oranı olmak üzere, $n$ dönem(periyot) sonunda birikimli değer,

$$\ddot{s}_{n\rceil i}$$

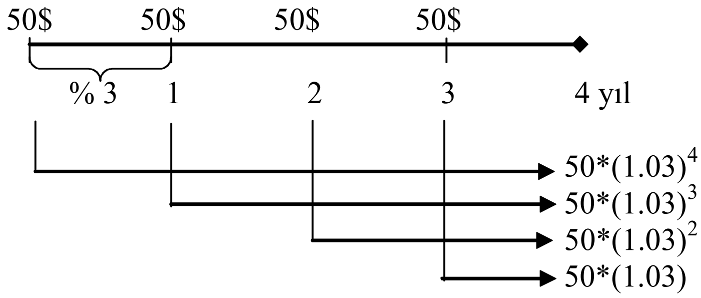
ile gösterilir.

Örneğin, %3 faizle her dönemin başında 1$ yatırılsın. Çizgi diyagramı




biçiminde çizilir. 4 yıl sonunda (son ödemeden 1 yıl sonra) birikimli değer $\ddot{s}_{4\rceil\%3}$ 'dir.

Eğer ödemeler 50$ olursa, *Birikimli Değer* $= 50 * \ddot{s}_{4\rceil\%3}$ olacacaktır. Çizgi diyagramı ise aşağıdaki gibi çizilir.




Buna göre,

$$\begin{aligned}
\textit{Birikimli Değer} &= 50 * (1.03)^4 + 50 * (1.03)^3 + 50 * (1.03)^2 + 50 * (1.03)^1 \\
&= 50 * \left[(1.03)^4 + (1.03)^3 + (1.03)^2 + (1.03)^1\right] \\
&= 50 * (4.309136) \\
&= 215.46\$
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde $\ddot{s}_{n\rceil i}$ aşağıdaki gibi yazılır.

$$\ddot{s}_{n\rceil i} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + ... + (1+i)^2 + (1+i)^1$$

**KAYNAKLAR**

Bowers, N. L. Jr., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., Nesbitt, C. J.(1997). *Actuarial Mathematics. Second Edition*, Society of Actuaries.

Moralı, N. (1997). *Hayat Sigortaları için Aktüeryal Teknikler*, Genç Sigortacılar Derneği Yayınları.

Workman, L. C. (1995). *Mathematical Foundation of Life Insurance*, Life Management Institute LOMA.