

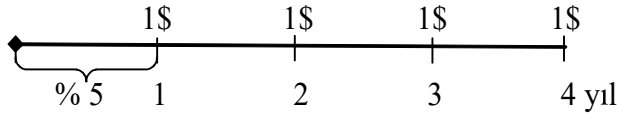
## 4.2 Dönem Sonu Annüitede Peşin Değer

Burada seri ödemeler olduğu zamanki durum incelenecektir.  $i$ , her dönem(periyot) için faiz oranı olmak üzere,  $n$  dönem(periyot) için peşin değer,

$$a_n|_i$$

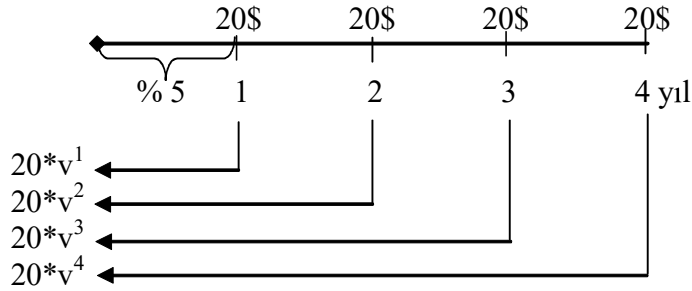
ile gösterilir.

Bir sigorta şirketinin, yılda %5 faizle 4 yıl boyunca her yılın sonunda 1\$ geri ödemesi olduğunda, ellerinde bulundurması gereken para düşünlüsin.



Ödemelerin sayısı 4, faiz oranı %5, bu ödemelerin peşin değeri  $a_{4|5\%}$  'dir. Eğer her bir ödeme 20\$ olursa, o zaman peşin değer  $20 * a_{4|5\%}$  olur.

Aşağıdaki çizgi diyagramda peşin değer nasıl hesaplandığı görülmektedir.



Peşin değer,

$$\begin{aligned} 20 * a_{4|5\%} &= 20 * v^1 + 20 * v^2 + 20 * v^3 + 20 * v^4, (v'ler \%5) \\ 20 * a_{4|5\%} &= 20 * (v^1 + v^2 + v^3 + v^4), (v'ler \%5) \\ &= 20 * (0.95238 + 0.907029 + 0.863838 + 0.822702) \\ &= 70.92\$ \end{aligned}$$

$$a_{n|i} = v^1 + v^2 + \dots + v^{n-1} + v^n$$

**Örnek:** 4 yıl boyunca her yıl 20\$ geri ödemesi olan peşin değeri hesaplayınız. Faiz oranını %5 almız.

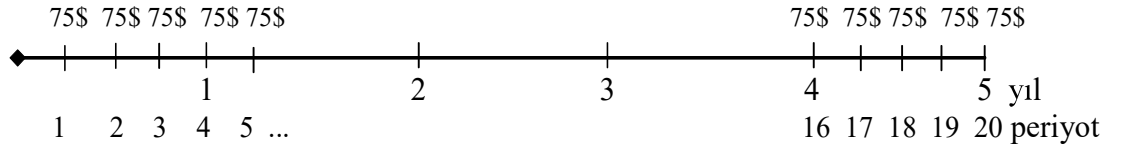
$$\begin{aligned} \text{Pesin Değer} &= 20 * a_{4|5\%} \\ &= 20 * (3.545950) \\ &= 70.92\$ \end{aligned}$$

Aşağıdaki tablo, hesaptaki paranın yıl yıl nasıl değiştiğini göstermektedir.

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
Yıl	Yıl Başı Hesaptaki Miktar	Yıl Boyunca Faizin Kazandırdığı [2]*0.05	Yıl Sonunda Hesaptaki Toplam [2]+[3]	Yıl Sonundaki Ödeme	Yıl Sonunda Hesapta Kalan [4]-[5]
1	70.92\$	3.55\$	74.47\$	20.00\$	54.47\$
2	54.47	2.72	57.19	20.00	37.19
3	37.19	1.86	39.05	20.00	19.05
4	19.05	0.95	20	20.00	0.00

**Not:**  $a_{n|i}$  daima  $n$  ' den küçüktür.  $s_{n|i}$  de daima  $n$  ' den büyüktür. ( $s_{1|i} = 1$  hariç)

**Örnek:** Bir kişi borcundan dolayı bankaya 5 yıl boyunca 3 ayda bir 75\$ ödeyecektir. Bu kişinin bankaya borcu ne kadardır? Faiz oranı 3 aylık bileşik nominal %8 olarak alınsın.



$$\begin{aligned}
\text{Peşin Değer} &= 75 * a_{20|\%2} \\
&= 75 * 16.351433 \\
&= 1226.36\$
\end{aligned}$$

#### 4.2.1 $a_{n|i}$ Tablolarının Kullanılması ve Yapısı

$$a_{n|i} = v + v^2 + \dots + v^{n-1} + v^n$$

ile annüite ödemesi 1 birim olduğunda peşin değer hesaplanır.  $a_{n|i} = v, v^2, \dots, v^{n-1}, v^n$  'ler tablodan bulunabilir.

$$\begin{aligned}
a_{2|i} &= a_{1|i} + v^2 \\
a_{3|i} &= a_{2|i} + v^3 \\
a_{4|i} &= a_{3|i} + v^4 \\
&\dots \\
a_{n+1|i} &= a_{n|i} + v^{n+1}
\end{aligned}$$

**Örnek:**  $a_{10|\%5} = 7.721735$ ,  $a_{11|\%5} = ?$

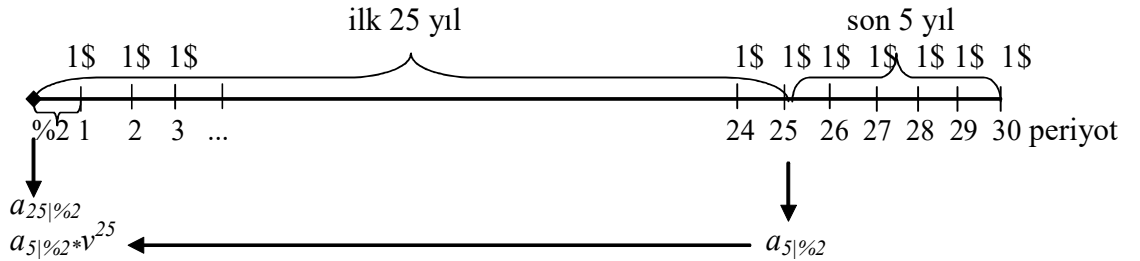
$$\begin{aligned}
a_{11|\%5} &= a_{10|\%5} + (v^{11}, \%5 \text{ faizle}) \\
&= 7.721735 + 0.584679 \\
&= 8.306414
\end{aligned}$$

$n > 25$  olduğunda,

$$a_{n|i} = a_{25|i} + a_{n-25|i}v^{25}$$

ifadesi kullanılarak  $a_{n|i}$  hesaplanabilir.

Örneğin, 30 yıl boyunca her yıl 1\$ ödeme olduğunda peşin değer  $a_{30|\%2}$  dir.



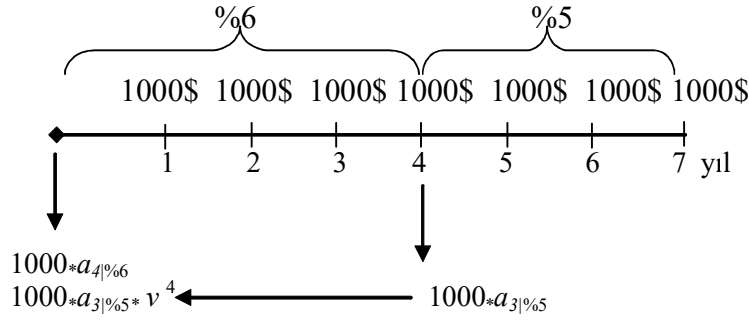
Buna göre 30 ödemenin peşin değeri,

$$a_{30|2} = a_{25|2} + a_{5|2} * (v^{25}, 2 \text{ faizle})$$

**Örnek:** Bir sigorta şirketi 7 yıl boyunca her yılın sonunda 1000\$ ödeyebilmesi için elinde ne kadar para bulundurması gerekir? İlk 4 yıl için faiz oranını %6, sonraki 3 yıl için faiz oranını %5 olarak alınız.

Burada elinde bulundurması gereken miktar 7 ödemenin peşin değeridir.

Çizgi diyagramı,



7 ödemenin peşin değeri

$$\begin{aligned} \text{Peşin Değer} &= 1000 * a_{4|6} + 1000 * a_{3|5} * (v^4, 5 \text{ faizle}) \\ &= 1000 * (3.465106) + 1000 * (2.723248) * (0.792094) \\ &= 5622.17\$ \end{aligned}$$

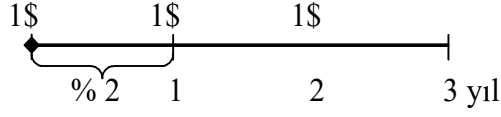
### 4.3 Dönem Başı Annüitede Peşin Değer

$i$ , her dönem(periyot) için faiz oranı olmak üzere,  $n$  dönem(periyot) için peşin değer

$$\ddot{a}_{n|i}$$

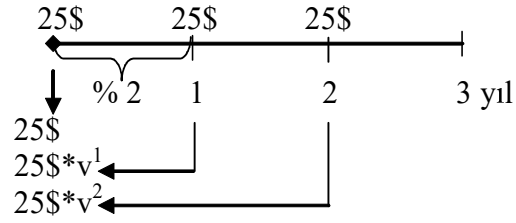
dir.

%2 faiz oranı ile 3 yıl boyunca her yılın başında 1\$ ödensin.



Peşin değeri (ilk yılın başındaki)  $\ddot{a}_{3|\%2}$  dir.

Eğer ödemeler 25\$ olsaydı, peşin değer  $25 * \ddot{a}_{3|\%2}$  olacaktır.



$$\begin{aligned}
 25 * \ddot{a}_{3|\%2} &= 25 + 25 * v^1 + 25 * v^2, (v'ler \%2 faizle) \\
 &= 25 * (1 + v^1 + v^2), (v'ler \%2 faizle) \\
 &= 25 * (1 + 0.980392 + 0.961169) \\
 &= 73.54\$
 \end{aligned}$$

$$\ddot{a}_{n|i} = 1 + v^1 + v^2 + \dots + v^{n-2} + v^{n-1}$$

## KAYNAKLAR

Bowers, N. L. Jr., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., Nesbitt, C. J.(1997). *Actuarial Mathematics. Second Edition*, Society of Actuaries.

Moralı, N. (1997). *Hayat Sigortaları için Aktüeryal Teknikler*, Genç Sigortacılar Derneği Yayınları.

Workman, L. C. (1995). *Mathematical Foundation of Life Insurance*, Life Management Institute LOMA.