5. HAFTA

Rasgele Vektörlerin Karakteristik Fonksiyonları

Rasgele vektörlerin karakteristik fonksiyonları için aşağıda verilen kavramlar, Prof. Dr. Fikri Öztürk'ün Matematiksel İstatistik kitabından yararlanılarak hazırlanmıştır (Öztürk, 1995).

Tanım: X bir rasgele değişken olmak üzere,

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= E(e^{itX}) \\ &= E(Cos(tX)) + iE(Sin(tX)) \ , \ t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

fonksiyonuna X rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu denir. $\left|e^{itX}\right| = 1$ olduğundan, $E(e^{itX})$ beklenen değeri her X için mevcuttur. Yani her rasgele değişkenin bir beklenen değeri vardır.

Teorem: X rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu φ_X olmak üzere;

- **i)** $\varphi_X(0) = 1$
- **ii)** $\left|\varphi_X(t)\right| \leq 1 \ , \ t \in \mathbb{R}$
- **iii)** φ_X düzgün sürekli
- **iv)** $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(ta) \ , \ t \in \mathbb{R}$, ($a$ ve b sabit)

Teorem: Bir rasgele değişkenin p inci momenti var ise $k \leq p$ için

$$\frac{d^k}{dt^k}\varphi_X(t)\Big|_{t=0} = i^k E(X^k) \ , \ k = 1,2,...$$

dır.

Tanım: X bir rasgele değişken olmak üzere var olması halinde;

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \ ; \ -h < t < h, \ h > 0$$

fonksiyonuna X rasgele değişkeninin moment üreten(çıkaran) fonksiyonu denir.

Bir rasgele değişkenin karakteristik fonksiyonu her zaman vardır ancak moment üreten fonksiyonu olmayabilir.

Eğer bir X rasgele değişkeninin moment üreten fonksiyonu var ise, $M_X(it) = \varphi_X(t)$ dir. Bu nedenle moment üreten fonksiyonlar da olasılık dağılımlarını tek biçimde belirlemektedir.

Bir X rasgele değişkeninin moment üreten fonksiyonu var ise,

$$\frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\Big|_{t=0} = E(X^k)\ ,\ k = 1,2,...$$

dir.

Tanım: $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ p-boyutlu sürekli bir rasgele vektör olmak üzere:

a) Var olması halinde, $E(X_1^{k_1} X_2^{k_2} ... X_p^{k_p})$ değerine $X_1, X_2, ..., X_p$ 'nin $(k_1, k_2, ..., k_p)$-ortak momenti denir. Burada $k_1, k_2, ..., k_p$ 'ler negatif olmayan sayılardır.

b) Var olması halinde, $E[(X_1 - E(X_1))^{k_1} (X_2 - E(X_2))^{k_2} ... (X_p - E(X_p))^{k_p}]$ değerine $X_1, X_2, ..., X_p$ 'nin $(k_1, k_2, ..., k_p)$- merkezi ortak momenti denir.

c) Var olması halinde,

$$M_{X_1, X_2, ..., X_p}(t_1, t_2, ..., t_p) = E(e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + ... + t_p X_p})\ ;\ t_i \in (-h_i, h_i),\ i = 1,2,...,p$$

fonksiyonuna $X_1, X_2, ..., X_p$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılımının moment üreten fonksiyonu ve

$$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = E(e^{\underline{t}'\underline{X}})\ ;\ \underline{t} \in (-\underline{h}, \underline{h})$$

fonksiyonuna $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ rasgele vektörünün moment üreten fonksiyonu denir. Burada $\underline{t}' = (t_1, t_2, ..., t_p)$ ve $\underline{h}' = (h_1, h_2, ..., h_p)$ dir.

d) $$\varphi_{X_1, X_2, ..., X_p}(t_1, t_2, ..., t_p) = E(e^{i(t_1 X_1 + t_2 X_2 + ... + t_p X_p)})\ ;\ t_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,...,p$$

fonksiyonuna $X_1, X_2, ..., X_p$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılımının karakteristik fonksiyonu ve

$$\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) = E(e^{i\underline{t}'\underline{X}})\ ;\ \underline{t} \in \mathbb{R}^p$$

fonksiyonuna $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ rasgele vektörünün karakteristik fonksiyonu denir.

Moment Üreten ve Karakteristik Fonksiyonların Bazı Özellikleri:

i) $$\varphi_{X_1, X_2, ..., X_p}(0,0,...,0) = 1 \text{ veya } \varphi_{\underline{X}}(\underline{0}) = 1$$

$$M_{X_1, X_2, ..., X_p}(0,0,...,0) = 1 \text{ veya } M_{\underline{X}}(\underline{0}) = 1$$

ii) $$\varphi_{a_1 X_1 + b_1, a_2 X_2 + b_2, ..., a_p X_p + b_p}(t_1, t_2, ..., t_p) = e^{i t_1 b_1 + i t_2 b_2 + ... + i t_p b_p} \varphi_{X_1, X_2, ..., X_p}(a_1 t_1, a_2 t_2, ..., a_p t_p)$$

veya

$$\varphi_{\underline{a}'\underline{X}+\underline{b}}(\underline{t}) = e^{i\underline{t}'\underline{b}}\varphi_{\underline{X}}(\underline{a}'\underline{t})$$

ve

$$M_{a_1X_1+b_1,a_2X_2+b_2,...,a_pX_p+b_p}(t_1,t_2,...,t_p) = e^{t_1b_1+t_2b_2+...+t_pb_p}M_{X_1,X_2,...,X_p}(a_1t_1,a_2t_2,...,a_pt_p)$$

veya

$$M_{\underline{a}'\underline{X}+\underline{b}}(\underline{t}) = e^{\underline{t}'\underline{b}}M_{\underline{X}}(\underline{a}'\underline{t})$$

dir. Burada $\underline{a}' = (a_1,a_2,...,a_p)$ ve $\underline{b}' = (b_1,b_2,...,b_p)$ sabitlerden oluşan vektörlerdir.

iii) $X_1,X_2,...,X_p$ rasgele değişkenlerinin ortak momentinin var olması halinde,

$$\left.\frac{\partial^{k_1+k_2+...+k_p}}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}...\partial t_p^{k_p}}\varphi_{X_1,X_2,...,X_p}(t_1,t_2,...,t_p)\right|_{t_1=t_2=...=t_p=0} = i^{\sum_{j=1}^{p}k_j}E(X_1^{k_1}X_2^{k_2}...X_p^{k_p})$$

ve

$$\left.\frac{\partial^{k_1+k_2+...+k_p}}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}...\partial t_p^{k_p}}M_{X_1,X_2,...,X_p}(t_1,t_2,...,t_p)\right|_{t_1=t_2=...=t_p=0} = E(X_1^{k_1}X_2^{k_2}...X_p^{k_p})$$

dir.

iv) $$\varphi_{X_1,X_2,...,X_p}(t_1,t_2,...,t_k,0,0,...,0) = \varphi_{X_1,X_2,...,X_k}(t_1,t_2,...,t_k)$$

ve

$$M_{X_1,X_2,...,X_p}(t_1,t_2,...,t_k,0,0,...,0) = M_{X_1,X_2,...,X_k}(t_1,t_2,...,t_k)$$

dir.

v) $X_1,X_2,...,X_p$ bağımsız rasgele değişkenler ise, $X_1,X_2,...,X_p$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılımının karakteristik ve moment üreten fonksiyonları, rasgele değişkenlerin marjinal dağılımlarının karakteristik ve moment üreten fonksiyonlarının çarpımı biçiminde yazılabilir. Yani

$$\varphi_{X_1,X_2,...,X_p}(t_1,t_2,...,t_p) = \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)...\varphi_{X_p}(t_p)$$

ve

$$M_{X_1,X_2,\ldots,X_p}(t_1,t_2,\ldots,t_p)=M_{X_1}(t_1)M_{X_2}(t_2)\ldots M_{X_p}(t_p)$$

dir.

Örnek: $\underline{X}'=(X_1,X_2,X_3)$ rasgele vektörüne ilişkin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} e^{-x_1-x_2-x_3} & ;\ x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0 \\ 0 & ;\ \textit{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olsun.

a) $\underline{X}'=(X_1,X_2,X_3)$ rasgele vektörünün moment üreten fonksiyonunu elde ediniz.

b) $E(X_1^2X_2X_3)$ 'in değerini bulunuz.

c) (X_1,X_2) 'nin moment üreten fonksiyonu elde ediniz.

d) $E(X_1)$ 'i elde ediniz.

Çözüm:

a)

$$\begin{aligned} M_{X_1,X_2,X_3}(t_1,t_2,t_3) &= E(e^{t_1X_1+t_2X_2+t_3X_3}) \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{t_1x_1+t_2x_2+t_3x_3}e^{-x_1-x_2-x_3}d_{x_1}d_{x_2}d_{x_3} \\ &= \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)} \\ &= \frac{1}{(1-t_1)}\frac{1}{(1-t_2)}\frac{1}{(1-t_3)} \\ &= M_{X_1}(t_1)M_{X_2}(t_2)M_{X_3}(t_3) \quad ;\ t_1<1,\ t_2<1,\ t_3<1 \end{aligned}$$

dır. Burada X_1,X_2,X_3 rasgele değişkenleri bağımsızdır.

b)

$$\begin{aligned} E(X_1^2X_2X_3) &= \frac{\partial^4}{\partial t_1^2\partial t_2\partial t_3}\left[\frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)}\right]\Bigg|_{t_1=t_2=t_3=0} \\ &= 2\frac{1}{(1-t_1)^3(1-t_2)^2(1-t_3)^2}\Bigg|_{t_1=t_2=t_3=0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

bulunur.

c)

$$M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = M_{X_1,X_2,X_3}(t_1,t_2,0)$$
$$= \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)} \; ; \; t_1 < 0, \; t_2 < 0$$

dır.

d)

$$E(X_1) = \frac{\partial}{\partial t_1} M_{X_1,X_2,X_3}(t_1,t_2,t_3)\Big|_{t_1=t_2=t_3=0}$$
$$= \frac{1}{(1-t_1)^2(1-t_2)(1-t_3)}\Big|_{t_1=t_2=t_3=0}$$
$$= 1$$

olarak bulunur. Ayrıca X_1 rasgele değişkenin beklenen değeri, X_1 'in moment üreten fonksiyonu ile de bulunabilir. Buradan,

$$M_{X_1}(t_1) = M_{X_1,X_2,X_3}(t_1,0,0)$$
$$= \frac{1}{(1-t_1)} \; ; \; t_1 < 0,$$

dir ve

$$E(X_1) = \frac{d}{dt_1} M_{X_1}(t_1)\Big|_{t_1=0}$$
$$= \frac{1}{(1-t_1)^2}\Big|_{t_1=0}$$
$$= 1$$

elde edilir.

Örnek: $X_1, X_2, ..., X_p$ bağımsız rasgele değişkenler ve her biri

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} e^{-x_i} & ; \; x_i > 0, \quad i = 1,2,...,p \\ 0 & ; \; \textit{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olsun. $Y = X_1 + X_2 + ... + X_p$ rasgele değişkeninin olasılık dağılımını bulunuz.

Çözüm: Burada her bir X_i'nin dağılımı, $\theta = 1$ olan üsteldir.

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= E(e^{tY}) \\
&= E(e^{tX_1 + tX_2 + \ldots + tX_p}) \\
&= E(\prod_{i=1}^{p} e^{tX_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{p} E(e^{tX_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{p} M_{X_i}(t) \\
&= \frac{1}{(1-t)^p}
\end{aligned}$$

dır ve bu moment üreten fonksiyon Gamma dağılımına sahip bir rasgele değişkenin moment üreten fonksiyonudur. Ayrıca Üstel dağılıma sahip rasgele değişkenlerin toplamının dağılımının Gamma olduğu bilinmektedir. Buradan

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(p)} y^{p-1} e^{-y} & ;\ y > 0 \\ 0 & ;\ \textit{diğer yerlerde} \end{cases}$$

dır. Yani $Y \sim Gamma(1, p)$ dir.

Örnek: $X_1, X_2, \ldots, X_k$ bağımsız rasgele değişkenler ve *i*=1,2,…,*k* için

$$f_{X_i}(x_i) = \binom{n_i}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n_i - x_i} \ ;\ x_i = 0, 1, \ldots, n_i,\ 0 < p < 1$$

olsun. $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$ rasgele değişkenin olasılık dağılımını bulunuz.

Çözüm: Burada her bir X_i'nin dağılımı, n_i ve p parametreli Binomdur ve Binom rasgele değişkenin Moment üreten fonksiyonu $M_{X_i}(t) = (1 - p + pe^t)^{n_i}$ dir. Burada Binom dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenlerin toplamını dağılımı istenmektedir.

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= E(e^{tY}) \\
&= E(e^{tX_1+tX_2+...+tX_k}) \\
&= E(\prod_{i=1}^{k} e^{tX_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{k} E(e^{tX_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{k} M_{X_i}(t) \\
&= \prod_{i=1}^{k} (1-p+pe^t)^{n_i} \\
&= (1-p+pe^t)^{\sum_{i=1}^{k} n_i}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Buradan *Y*'nin olasılık fonksiyonu

$$
f_Y(y) = \binom{\sum_{i=1}^{k} n_i}{y} p^y (1-p)^{\sum_{i=1}^{k} n_i - y} \quad ; \; y = 0,1,...,\sum_{i=1}^{k} n_i, \; 0 < p < 1
$$

dir ve $Y \sim Binom(\sum_{i=1}^{k} n_i, p)$ dağılır. Yani bağımsız Binom rasgele değişkenlerin toplamının dağılım Binomdur.

Örnek: $X_1, X_2, ..., X_p$ bağımsız rasgele değişkenler ve *i*=1,2,…,*p* için

$$
f_{X_i}(x_i) = \frac{e^{-\lambda_i} \lambda_i^{x_i}}{x_i!} \; ; \; x_i = 0,1,...
$$

olsun. $Y = X_1 + X_2 + ... + X_k$ rasgele değişkenin olasılık dağılımını bulunuz.

Çözüm: Burada her bir X_i'nin dağılımı, λ_i parametreli Poissondur ve Poisson rasgele değişkenin Moment üreten fonksiyonu $M_{X_i}(t) = e^{-\lambda_i(e^t - 1)}$ dir. Burada Poisson dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenlerin toplamını dağılımı istenmektedir.

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= E(e^{tY}) \\
&= E(e^{tX_1+tX_2+\ldots+tX_p}) \\
&= E(\prod_{i=1}^{p} e^{tX_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{p} E(e^{tX_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{p} M_{X_i}(t) \\
&= \prod_{i=1}^{p} e^{-\lambda_i(e^t-1)} \\
&= e^{-\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(e^t-1)}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Buradan *Y*'nin olasılık fonksiyonu

$$
f_Y(y) = \frac{e^{-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i} (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i)^y}{y!} \quad ; \; y = 0,1,\ldots
$$

dir ve $Y \sim Poisson(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i)$ dağılır. Yani bağımsız Poisson rasgele değişkenlerin toplamının dağılım Poissondur.