KOMPLEKS SAYILAR

- Tam sayılar

$$Z = \{0, 1, 2, , \dots -1, -2, -3 \dots\}$$

- Rasyonel sayılar

$$Q \equiv \left\{ \dots -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots \frac{1}{2}, \dots \frac{2}{7} \dots \right\}$$

$2x+5=0$ denkleminin çözümü $x = -\frac{5}{2}$

- İrrasyonel sayılar

$$Q' \equiv \{\dots \sqrt{2}, \pi, e, -\sqrt{3}, \dots\}$$

$x^2-3=0$ denkleminin çözümü $x = \mp\sqrt{3}$

FİZ202 - AYŞE KAŞKAŞ

- Reel sayılar kümesi rasyonel ve irrasyonel sayılardan oluşur.

$$R \equiv \left\{ \dots -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -1, 0, 1, \dots \sqrt{2}, \pi, e, -\sqrt{3} \dots \right\}$$

- **Ancak** $x^2+1=0$ **denklemini sağlayan reel bir x-sayısı yoktur** $(x^2 \geq 0)$. Bu denklemin çözümleri "$\boldsymbol{i}$" ile gösterilen kompleks (imajiner) birim tanımlanarak kompleks sayılarla ifade edilir. Öyle ki:

$$x^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=-1 \qquad \boldsymbol{i}^2=-1$$

FİZ202 - AYSE KASKAŞ

- Kompleks sayı

$z = x + \boldsymbol{i}\, y \qquad z = (x\,, y)$

$x \rightarrow$ z'nin reel kısmı, Re(z)

$y \rightarrow$ z'nin imajiner kısmı, Im(z)

$z \longrightarrow$ kompleks değişken

x ve y $\rightarrow$ reel sayılar

- Kompleks bir sayının kompleks eşleniği

$z = x + \boldsymbol{i}\, y$ ise $\quad z^* = x - \boldsymbol{i}\, y$

$z = x - \boldsymbol{i}\, y$ ise $\quad z^* = x + \boldsymbol{i}\, y$

FİZ202 - AYŞE KAŞKAŞ

- Kompleks sayılarla cebirsel işlemler

$z_1 = x_1 + \boldsymbol{i}\, y_1 \qquad z_2 = x_2 + \boldsymbol{i}\, y_2$

- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \boldsymbol{i}(y_1 + y_2)$

- $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \boldsymbol{i}\,(y_1 - y_2)$

- $$\begin{aligned} z_1 z_2 &= x_1 x_2 + \boldsymbol{i}\, y_1 x_2 + \boldsymbol{i}\, x_1 y_2 - y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + \boldsymbol{i}(y_1 x_2 + x_1 y_2) \end{aligned}$$

- $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \boldsymbol{i}\, y_1}{x_2 + \boldsymbol{i}\, y_2} \, \frac{x_2 - \boldsymbol{i}\, y_2}{x_2 - \boldsymbol{i}\, y_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + \boldsymbol{i}\,(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

- $$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} \quad (z_2 \neq 0)$$

FİZ202 - AYŞE KAŞKAŞ

KOMPLEKS SAYILARIN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

z_1 ve z_2 kompleks sayılar olsun.

- Değişme özelliği

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

- Birleşme özelliği

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

$$z_1(z_2\, z_3) = (z_1\, z_2)\, z_3$$

- Dağılma özelliği

$$z(z_1 + z_2) = z\, z_1 + z\, z_2$$

FİZ202 - AYŞE KAŞKAŞ

Kompleks Sayıların Cebirsel Özellikleri

- $z + 0 = z \qquad z\,.1 = z$
- $z + (-z) = 0$
- $\boldsymbol{i}\, y = y\, \boldsymbol{i}$
- $z_1\, z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 0$

veya $\quad z_2 = 0$ veya $\quad z_1 = z_2 = 0$

- $z = x + \boldsymbol{i}\, y \quad \Rightarrow \quad -z = -x - \boldsymbol{i}\, y$

FİZ202 - AYŞE KAŞKAŞ

- "z" sıfır olmayan bir kompleks sayı ise $zz^{-1}=1$ olacak şekilde bir z^{-1} değeri vardır. Öyle ki:

$$z^{-1}=u+\boldsymbol{i}\,v \quad\Rightarrow\quad z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

- $$\frac{z_1+z_2}{z_3}=(z_1+z_2)\,z_3^{-1} \qquad (z_3\neq 0)$$

- $$(z_1\,z_2)\left(z_1^{-1}\,z_2^{-1}\right)=\left(z_1\,z_1^{-1}\right)\left(z_2 z_2^{-1}\right)=1$$

$$z_1\neq 0 \quad , \quad z_2\neq 0$$

FİZ202- AYŞE KAŞKAŞ

KAYNAKLAR

- Complex Variables and Applications, J.W. Brown and R.V. Churchill, 1990.
- Kısmi Diferansiyel Denklemler, Schaum's Outlines, P. Duchateu ve D.W. Zachmann, 2000.
- Complex Analysis, Theodore W. Gamelin, 2001.

FİZ202 - AYŞE KAŞKAŞ