Kutup Noktasındaki Rezidüler

Teorem: f(z) fonksiyonu yalnızca ve yalnızca $\varphi(z)$ analitikse ve z_0'da sıfırdan farklı olduğu durumda aşağıdaki şekilde yazılabilirse f(z) fonksiyonunun izole singüler noktası, m. basamaktan bir kutup noktasıdır.

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$$

$$\operatorname*{Rez}_{z\to z_0} f(z) = \varphi(z_0) \qquad m = 1$$

ve

$$\operatorname*{Rez}_{z\to z_0} f(z) = \frac{\varphi^{m-1}(z_0)}{(m-1)!} \qquad m \geq 2$$

Teorem: : f(z) fonksiyonu z_0 noktasında analitik olsun. f(z) yalnızca ve yalnızca

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

olacak şekilde z_0 noktasında $(z_0 \neq 0)$ analitik bir g(z) fonksiyonu varsa

f(z) fonksiyonu z_0 noktasında m. basamaktan bir kutup noktasına sahiptir.

Teorem: p(z) ve q(z) fonksiyonları z_0 noktasında analitikse, $p(z_0) \neq 0$ ise ve q(z) z_0 noktasında m. basamaktan bir sıfır değerine sahipse, o zaman $\frac{p(z)}{q(z)}$ oranı z_0 noktasında m. basamaktan kutup noktasına sahiptir.

Teorem: p(z) ve q(z) fonksiyonları z_0 noktasında analitik olsun. $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ ve $q'(z_0) \neq 0$ ise o zaman z_0 noktası $\frac{p(z)}{q(z)}$ oranının basit kutup noktasıdır.

$$\operatorname*{Rez}_{z \to z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Belirli İntegraller

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\mathrm{Rez}}\ f(z)$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\mathrm{Rez}}\ f(z)$$

Belirli İntegraller

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(ax)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)\,dx$$

$$\int_{-R}^{R} f(x)\cos(ax)\,dx + i\int_{-R}^{R} f(x)\sin(ax)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{iax}\,dx$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$$

Belirli İntegraller

$$\int_0^{2\pi} f(sin\theta, cos\theta)d\theta$$

$$z = e^{i\theta} \qquad\qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_C f\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{\boldsymbol{i}z}$$

KAYNAKLAR

- Complex Variables and Applications, J.W. Brown and R.V. Churchill, 1990.
- Kısmi Diferansiyel Denklemler, Schaum's Outlines, P. Duchateu ve D.W. Zachmann, 2000.
- Complex Analysis, Theodore W. Gamelin, 2001.