KONU 5: DOĞRUSAL PROGRAMLAMA MODELİNDE DUALLİK KURAMI

Her d.p.p. kendisi ile içsel bağlantılı, ikincil bir problem yapısına sahiptir. Bir d.p.p.' de, problem modelinin başlangıç formülasyonu Primal (birincil) olarak tanımlanırsa, diğeri Dual (ikincil) olarak adlandırılır. DP' da duallik, d.p.p.' nin çözümüne kolaylık getirmesinin yanı sıra verilen modele uygun olarak ekonomik açıklama ve yorum yapma olanağı sağlayıp, modelin yapısına veya parametrelerdeki değişimler ile ilgili işlemlere kolaylık getirmektedir.

Primal ve dual problemlerin yansıttığı çözümler farklı ekonomik göstergelerdir. Eğer bir d.p.p.' de amaç, optimal ürün/faaliyet belirlenmesi ise primal model, kaynakların en etkin kullanımı söz konusu ise de dual model tercih edilecektir.

5.1. Dual Modelin Gösterimi

Bir primal modeli dual modele dönüştürme işleminde aşağıdaki bilgiler dikkate alınmalıdır.

- Primal modelde amaç maksimizasyon (minimizasyon) ise, dual modelde amaç minimizasyon (maksimizasyon) olur.
- Primal modeldeki her bir kısıt için bir dual değişken vardır.
- Primal modeldeki her değişken için bir kısıt vardır.
- Primal modelin kısıtlarının sağ yan değerleri, dual modelin amaç fonksiyonu değişkenlerinin katsayıları olur.
- Primal modelin amaç fonksiyonu değişkenlerinin katsayıları, dual modelin kısıtlarının sağ yan değerleri olur.
- Primal modelde *n* tane değişken ve *m* tane kısıt varsa, dual modelde *m* tane değişken ve *n* tane kısıt vardır.
- Primal modelde kısıtların yönleri "$\leq$" biçiminde ise, dual modelde kısıtların yönleri "$\geq$" biçimindedir. Bu ilişkinin tersi de doğrudur.
- Her iki modelde de karar değişkenleri negatif olmama koşuluna sahiptirler.

Primal-Dual modelin yasal biçimde gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{rcl} P:\ \max\ Z = \mathbf{cX} & & D:\ \min\ Z = \mathbf{b}'\mathbf{V} \\ A\mathbf{X} \leq \mathbf{b} & \Rightarrow & A'\mathbf{V} \geq \mathbf{c}' \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} & & \mathbf{V} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P:\ \min\ Z = \mathbf{cX} & & D:\ \max\ Z = \mathbf{b}'\mathbf{V} \\ A\mathbf{X} \geq \mathbf{b} & \Rightarrow & A'\mathbf{V} \leq \mathbf{c}' \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} & & \mathbf{V} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Örnek 1:

$$
\begin{aligned}
P:\ \ \min\ Z &= 3X_1 + 5X_2 \\
2X_1 + 4X_2 &\le 5 \\
X_1 + 7X_2 &\ge 8 \\
X_1,\ X_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı primal problemin yasal biçimde dualini alınız.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
P:\ \ \min\ Z &= 3X_1 + 5X_2 \\
-2X_1 - 4X_2 &\ge -5 \\
X_1 + 7X_2 &\ge 8 \\
X_1,\ X_2 &\ge 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
D:\ \ \max\ Z &= -5V_1 + 8V_2 \\
-2V_1 + V_2 &\le 3 \\
-4V_1 + 7X_2 &\le 5 \\
V_1,\ V_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Örnek 2:

$$
\begin{aligned}
P:\ \ \min\ Z &= 3X_1 + 5X_2 \\
2X_1 + 4X_2 &\le 5 \\
X_1 + 7X_2 &\ge 8 \\
5X_1 + 2X_2 &= 3 \\
X_1,\ X_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı primal problemin yasal biçimde dualini alınız.

Çözüm:

NOT: Bir d.p.p.’ d herhangi bir kısıt “=” biçiminde verilmiş ise bu kısıt, “ $\le$” ve “$\ge$” biçiminde iki kısıt olarak yazılır. Daha sonra problem yasal biçime dönüştürülerek, duali alınır.

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j = b_i
\quad
\begin{array}{l}
\nearrow \ \ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \le b_i \\[2ex]
\searrow \ \ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \ge b_i
\end{array}
\qquad\qquad i = 1,2,\ldots,m
$$

$$
\begin{aligned}
P:\ \ \min\ Z &= 3X_1 + 5X_2 \\
-2X_1 - 4X_2 &\ge -5 \\
X_1 + 7X_2 &\ge 8 \\
5X_1 + 2X_2 &\ge 3 \\
5X_1 + 2X_2 &\le 3 \\
X_1,\ X_2 &\ge 0
\end{aligned}
\quad , \quad
\begin{aligned}
P:\ \ \min\ Z &= 3X_1 + 5X_2 \\
-2X_1 - 4X_2 &\ge -5 \\
X_1 + 7X_2 &\ge 8 \\
5X_1 + 2X_2 &\ge 3 \\
-5X_1 - 2X_2 &\ge -3 \\
X_1,\ X_2 &\ge 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
D:\ \ \max\ Z &= -5V_1 + 8V_2 + 3V_3 - 3V_4 \\
-2V_1 + V_2 + 5V_3 - 5V_4 &\le 3 \\
-4V_1 + 7V_2 + 2V_3 - 2V_4 &\le 5 \\
V_1, V_2, V_3, V_4 &\ge 0
\end{aligned}
$$

5.2. Primal-Dual Model Özellikleri

Teorem 1: Bir d.p.p.

$$\begin{aligned} P:\ \max\ & Z=\mathbf{cX} \\ & A\mathbf{X}=\mathbf{b} \\ & \mathbf{X}\geq\mathbf{0} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. Buna göre, dual model

$$\begin{aligned} D:\quad \min\ & Z=\mathbf{b}'\mathbf{V} \\ & A'\mathbf{V}\geq\mathbf{c}' \\ & \mathbf{V}\ \textit{işareti belirtilmemiş} \end{aligned}$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned} P:\ \max\ & Z=\mathbf{cX} \\ & A\mathbf{X}\leq\mathbf{b} \\ & -A\mathbf{X}\leq-\mathbf{b} \\ & \mathbf{X}\geq\mathbf{0} \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} D:\ \min\ & Z=\mathbf{b}'\mathbf{V}'-\mathbf{b}'\mathbf{V}'' \\ & A'\mathbf{V}'-A'\mathbf{V}''\geq\mathbf{c}' \\ & \mathbf{V}',\mathbf{V}''\geq\mathbf{0} \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} D:\ \min\ & Z=\mathbf{b}'\left(\mathbf{V}'-\mathbf{V}''\right) \\ & A'\left(\mathbf{V}'-\mathbf{V}''\right)\geq\mathbf{c}' \\ & \mathbf{V}',\mathbf{V}''\geq\mathbf{0} \end{aligned}$$

NOT: $\mathbf{V}=\mathbf{V}'-\mathbf{V}''$ vektörüne işareti belirilmemiş vektör denir. Çünkü, $\mathbf{V}',\mathbf{V}''\geq\mathbf{0}$ olduğundan, iki negatif olmayan vektör farkına eşit olan $\mathbf{V}$ vektörünün elemanları negatif, sıfır veya pozitif olabilir. Buna göre,

$\mathbf{V}'>\mathbf{V}''\Rightarrow\mathbf{V}>0$

$\mathbf{V}'=\mathbf{V}''\Rightarrow\mathbf{V}=0$

$\mathbf{V}'<\mathbf{V}''\Rightarrow\mathbf{V}<0$

dır. Bu nedenle $\mathbf{V}$ vektörü işareti belirtilmemiş olarak adlandırılır. Verilen primal modelin duali

$$\begin{aligned} D:\quad \min\ & Z=\mathbf{b}'\left(\mathbf{V}'-\mathbf{V}''\right) \\ & A'\left(\mathbf{V}'-\mathbf{V}''\right)\geq\mathbf{c}' \\ & \mathbf{V}\ \textit{işareti belirtilmemiş} \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 2: Bir d.p.p.

$$\begin{aligned} P:\ \min\ & Z=\mathbf{cX} \\ & A\mathbf{X}=\mathbf{b} \\ & \mathbf{X}\geq\mathbf{0} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. Buna göre, dual model

$$
\begin{aligned}
D: \quad & \max\ Z = \mathbf{b}'\mathbf{V} \\
& A'\mathbf{V} \le \mathbf{c}' \\
& \mathbf{V}\ \textit{işareti belirtilmemiş}
\end{aligned}
$$

dır.

NOT: Primal modelin $i.$ kısıtı eşitlik biçiminde ise $i.$ dual değişkenin işareti belirtilmemiştir.

Teorem 3: Bir d.p.p.

$$
\begin{aligned}
P: \quad & \max\ Z = \mathbf{c}\mathbf{X} \\
& A\mathbf{X} \le \mathbf{b} \\
& \mathbf{X}\ \textit{işareti belirtilmemiş}
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlansın. Buna göre, dual model

$$
\begin{aligned}
D: \quad & \min\ Z = \mathbf{b}'\mathbf{V} \\
& A'\mathbf{V} = \mathbf{c}' \\
& \mathbf{V} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

dır.

İspat: $\mathbf{X}$ işareti belirtilmemiş değişken yerine $\mathbf{X} = \mathbf{X}' - \mathbf{X}''$ yazılırsa, tüm değişkenler "$\ge \mathbf{0}$" koşulunu sağlar ve d.p.p.

$$
\begin{aligned}
P: \quad & \max\ Z = \mathbf{c}\left(\mathbf{X}' - \mathbf{X}''\right) \\
& A\left(\mathbf{X}' - \mathbf{X}''\right) \le \mathbf{b} \\
& \mathbf{X}', \mathbf{X}'' \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

biçimine dönüşür. Bu primal problemin duali alınırsa,

$$
\begin{aligned}
D: \quad & \min\ Z = \mathbf{b}'\mathbf{V} \\
& A'\mathbf{V} \ge \mathbf{c}' \\
& -A'\mathbf{V} \ge -\mathbf{c}' \\
& \mathbf{V} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
D: \quad & \min\ Z = \mathbf{b}'\mathbf{V} \\
& A'\mathbf{V} = \mathbf{c}' \\
& \mathbf{V} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

olur.

NOT: Primal modelde $i.$ değişkenin işareti belirtilmemiş ise, $i.$ dual kısıt eşitlik biçimindedir.

Teorem 4: Bir d.p.p.

$$
\begin{aligned}
P: \quad & \max\ Z = \mathbf{c}\mathbf{X} \\
& A\mathbf{X} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{X}\ \textit{işareti belirtilmemiş}
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlansın. Buna göre, dual model

$D:\quad \min\ Z = \mathbf{b}'\mathbf{V}$
$A'\mathbf{V} = \mathbf{c}'$
$\mathbf{V}$ *işareti belirtilmemiş*

dır.

Teorem 5: Bir d.p.p.

$$
\begin{aligned}
P:\quad & \max\ Z = \mathbf{c}\mathbf{X} \\
& \sum_j a_{ij} X_j \le b_i \ \ ,\ i = 1,2,\ldots,k \\
& \sum_j a_{ij} X_j = b_i \ \ ,\ i = k+1, k+2, \ldots, m \\
& X_j \ge 0 \ \ ,\ \ j = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlansın. Buna göre, dual model

$$
\begin{aligned}
D:\quad & \min\ Z = \mathbf{b}'\mathbf{V} \\
& A'\mathbf{V} \ge \mathbf{c}' \\
& V_i \ge 0 \ \ ,\ i = 1,2,\ldots,k \\
& V_i \ \textit{işareti belirtilmemiş}\ ,\ i = k+1, k+2, \ldots, m
\end{aligned}
$$

dır.

Teorem 6: Dualin duali primali verir.

İspat:

$$
\begin{aligned}
P:\ & \min\ Z = \mathbf{c}\mathbf{X} & & D:\ \max\ Z = \mathbf{b}'\mathbf{V} \\
& A\mathbf{X} \ge \mathbf{b} & \Rightarrow\quad & A'\mathbf{V} \le \mathbf{c}' \\
& \mathbf{X} \ge \mathbf{0} & & \mathbf{V} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Dual modelde katsayılar (-1) ile çarpılırsa,

$$
\begin{aligned}
D:\ & \min\ Z = -\mathbf{b}'\mathbf{V} \\
& -A'\mathbf{V} \ge -\mathbf{c}' \\
& \mathbf{V} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu dual modelin duali alınırsa

$$
\begin{aligned}
D:\ & \max\ Z = -\mathbf{c}\mathbf{X} & & \min\ Z = \mathbf{c}\mathbf{X} \\
& -A'\mathbf{X} \le -\mathbf{b} & \Rightarrow\quad & A\mathbf{X} \ge \mathbf{b} \\
& \mathbf{X} \ge \mathbf{0} & & \mathbf{X} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

primal modele ulaşılır.

Teorem 7:

$$
\begin{aligned}
P:\ & \max\ Z=\mathbf{cX} \\
& A\mathbf{X}\le \mathbf{b} \\
& \mathbf{X}\ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı primal modelin bir uygun çözümü $\mathbf{X}_0$,

$$
\begin{aligned}
D:\ & \min\ Z=\mathbf{b}'\mathbf{V} \\
& A'\mathbf{V}\ge \mathbf{c}' \\
& \mathbf{V}\ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

dual modelin bir uygun çözümü $\mathbf{V}_0$ ise,

$$\mathbf{cX}_0 \le \mathbf{b}'\mathbf{V}_0$$

dir. Buna göre, primal modelin amaç fonksiyon değeri, dual modelin amaç fonksiyon değerinden küçüktür veya eşittir.

Teorem 8:

$$
\begin{aligned}
P:\ & \max\ Z=\mathbf{cX} \\
& A\mathbf{X}\le \mathbf{b} \\
& \mathbf{X}\ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı primal modelin bir uygun çözümü $\hat{\mathbf{X}}$,

$$
\begin{aligned}
D:\ & \min\ Z=\mathbf{b}'\mathbf{V} \\
& A'\mathbf{V}\ge \mathbf{c}' \\
& \mathbf{V}\ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

dual modelin bir uygun çözümü $\hat{\mathbf{V}}$ olsun. Bu iki uygun çözümün amaç fonksiyonuna verdiği değer birbirine eşit ($\mathbf{c}\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{b}'\hat{\mathbf{V}}$) ise, $\hat{\mathbf{X}}$ ve $\hat{\mathbf{V}}$ sırasıyla primal modelin ve dualin en iyi çözümleridir.

Teorem 9: Primal ya da dual modellerden herhangi biri en iyi çözüme sahip ise, diğeri de en iyi çözüme sahiptir ve her iki modelin amaç fonksiyon değerleri aynıdır.

Örnek 3: Aşağıdaki primal modellerin, (i) dualini ve (ii) yasal biçimde dualini alınız.

a.

$$
\begin{aligned}
P:\ & \max\ Z=X_1+X_2 \\
& 3X_1+4X_2=12 \\
& X_1-2X_2=4 \\
& X_1, X_2\ge 0
\end{aligned}
$$

i. $D:\ \min\ Z = 12V_1 + 4V_2$

$$3V_1 + V_2 \geq 1$$
$$4V_1 - 2V_2 \geq 1$$
V_1, V_2 *işareti belirtilmemiş*

ii. $P:\ \max\ Z = X_1 + X_2$

$$3X_1 + 4X_2 \leq 12$$
$$-3X_1 - 4X_2 \leq -12$$
$$X_1 - 2X_2 \leq 4$$
$$-X_1 + 2X_2 \leq -4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

$\Rightarrow$

$D:\ \min\ Z = 12V_1 + 4V_2 + 4V_3 - 4V_4$

$$3V_1 - 3V_2 + V_3 - V_4 \geq 1$$
$$4V_1 - 4V_2 - 2V_3 + 2 - 4V_4 \geq 1$$
$$V_1, V_2, V_3, V_4 \geq 0$$

b. $P:\ \max\ Z = 2X_1 + 3X_2$

$$X_1 + 2X_2 \geq 5$$
$$5X_1 + 3X_2 \leq 6$$
$$4X_1 + 5X_2 = 7$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

i. $D:\ \min\ Z = 5V_1 + 6V_2 + 7V_3$

$$-V_1 + 5V_2 + 4V_3 \geq 2$$
$$-2V_1 + 3V_2 + 5V_3 \geq 3$$
$V_1, V_2 \geq 0$, V_3 *işareti belirtilmemiş*

ii. $P:\ \max\ Z = 2X_1 + 3X_2$

$$-X_1 - 2X_2 \leq -5$$
$$5X_1 + 3X_2 \leq 6$$
$$4X_1 + 5X_2 \leq 7$$
$$-4X_1 - 5X_2 \leq -7$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

$\Rightarrow$

$D:\ \min\ Z = -5V_1 + 6V_2 + 7V_3 - 7V_4$

$$-V_1 + 5V_2 + 4V_3 - 4V_4 \geq 2$$
$$-2V_1 + 3V_2 + 5V_3 - 5V_4 \geq 3$$
$$V_1, V_2, V_3, V_4 \geq 0$$

c. $P:\ \min\ Z = -2X_1 + X_2 - 3X_3$

$$2X_1 - X_2 + X_3 \geq 5$$
$$X_1 + X_2 - X_3 = -4$$
$$X_1 - X_2 + 3X_3 \leq 6$$
$X_1, X_2 \geq 0$, X_3 *işareti belirtilmemiş*

i. $D:\ \max\ Z = 5V_1 - 4V_2 - 6V_3$

$$2V_1 + V_2 - V_3 \leq -2$$
$$-V_1 + V_2 + V_3 \leq 1$$
$$V_1 - V_2 + 3V_3 = -3$$
$V_1, V_3 \geq 0$, V_2 *işareti belirtilmemiş*

ii.

$$P: \ \min\ Z = -2X_1 + X_2 - 3(X_3' - X_3'')$$
$$2X_1 - X_2 + (X_3' - X_3'') \geq 5$$
$$X_1 + X_2 - (X_3' - X_3'') \geq -4$$
$$-X_1 - X_2 + (X_3' - X_3'') \geq 4$$
$$-X_1 + X_2 - 3(X_3' - X_3'') \geq -6$$
$$X_1, X_2, X_3', X_3'' \geq 0$$

$$\Rightarrow$$

$$D: \ \max\ Z = 5V_1 - 4V_2 + 4V_3 - 6V_4$$
$$2V_1 + V_2 - V_3 - V_4 \leq -2$$
$$-V_1 + V_2 - V_3 + V_4 \leq 1$$
$$V_1 - V_2 + V_3 - 3V_4 \leq -3$$
$$-V_1 + V_2 - V_3 + 3V_4 \leq 3$$
$$V_1, V_2, V_3, V_4 \geq 0$$

5.3. Dual Modelin Ekonomik Yorumu

Bir primal-dual model ilişkisi

$$\begin{array}{lll} P: \ \max\ Z = \mathbf{cX} & & D: \ \min\ Z = \mathbf{b}'\mathbf{V} \\ A\mathbf{X} \leq \mathbf{b} & \Rightarrow & A'\mathbf{V} \geq \mathbf{c}' \\ \mathbf{X} \geq \mathbf{0} & & \mathbf{V} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

biçiminde tanımlı olsun. Primal modelin en iyi temeli B ve buna ilişkin fiyat vektörü $\mathbf{c}_B$ olsun.

$$Z = \mathbf{c}_B \mathbf{X}_B = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{V}'\mathbf{b} \qquad (5.1)$$

olduğundan, (11.1) eşitliğinin $\mathbf{b}'$ ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{b}} = \mathbf{c}_B B^{-1} = \mathbf{V}' \qquad (5.2)$$

elde edilir. Buna göre, sağ yan değer b_i , $i = 1,2,...,m$ de yapılacak bir birimlik artışın amaç fonksiyonunda oluşturacağı değişiklik miktarı dual değişken V_i , $i = 1,2,...,m$ ile verilir. Ekonomik olarak, $\mathbf{V}$ dual vektörü, $\mathbf{b}$ ihtiyaçlar vektörünün "gölge fiyatları" olarak adlandırılır. Gölge fiyat, herhangi bir üretim kaynağı miktarının bir birim artırılması veya azaltılması durumunda amaç fonksiyonunda meydana gelecek artış veya azalış olarak tanımlanır.

b_i , $i = 1,2,...,m$, $i.$ kısıtın sağ yan değeri olmak üzere, bu $i.$ kısıtın gölge fiyatı, optimal Z değerini artıran (maksimum problemde) ya da azaltan (minimum problemde) miktardır. Bir kaynağın gölge fiyatı, o kaynağın marjinal verimini gösterir. Bir d.p.p.' de bir kısıt ile ilgili marjinal değer, o kısıtın sağ yan değerinin bir birim artırılması halinde amaç fonksiyonunun yeni değeri ile orijinal problemdeki optimal değeri arasındaki fark olarak tanımlanır. Bu marjinal değere de "gölge fiyat" denir.

Verilen d.p.p. için optimal çözüme ulaşıldığında, $i.$ kaynaktaki değişim primal modelin amaç fonksiyonunu etkileyecektir. V_i , $i=1,2,...,m$, $i.$ kaynakta bir birim artış yapıldığında primal modelin amaç fonksiyonunun en iyi değerinin $i.$ kaynaktaki artış karşısında değişimini vermektedir. $i.$ kaynaktaki bir birimlik artış, amaç fonksiyonunun en iyi çözümüne karşı gelen değerinde V_i kadar bir artışa neden olduğundan, karar vericinin bu kaynağın bir birim artışı için ödemeye hazır olacağı fiyat en fazla V_i kadar ($i.$ kaynağın gölge fiyatı kadar) olmalıdır.

NOT 1: Verilen bir primal d.p.p. simpleks tablo ile çözülürse, primal problemin en iyi çözüm tablosundan, dual d.p.p.' nin en iyi çözümü bulunabilir. Primal problemin optimal çözüm tablosundaki gevşek değişkenlere ilişkin $Z_j - c_j$, $j=1,2,...,m$ değerleri, dual değişken değerleridir.

NOT 2: Bir primal model sınırsız çözüme sahipse, dual modelin uygun çözümü yoktur. Bir primal modelin uygun çözümü yoksa, dual model sınırsız çözüme sahiptir.

Örnek 4:

$$
\begin{aligned}
P:\ \max\ Z &= 8X_1 + 9X_2 + 4X_3 \\
X_1 + X_2 + 2X_3 &\le 2 \\
2X_1 + 3X_2 + 4X_3 &\le 3 \\
7X_1 + 6X_2 + 2X_3 &\le 8 \\
X_1, X_2, X_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı primal modelin en iyi çözüm tablosu aşağıda verilmiştir.

Optimal tablo			8	9	4	0	0	0
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	$\mathbf{y}_6$
0	X_4	7/9	0	0	4/3	1	-1/9	-1/9
9	X_2	5/9	0	1	8/3	0	7/9	-2/9
8	X_1	2/3	1	0	-2	0	-2/3	1/3
		$Z=31/3$	0	0	4	0	5/3	1/3

Bu tablodan yararlanarak, dual modelin en iyi çözümünü elde ediniz.

Çözüm:

Verilen primal model standart halde

$$
\begin{aligned}
P:\ \ \max\ Z &= 8X_1 + 9X_2 + 4X_3 \\
X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 &= 2 \\
2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + X_5 &= 3 \\
7X_1 + 6X_2 + 2X_3 + X_6 &= 8 \\
X_i \geq 0\ ,\ i &= 1,2,\ldots,6
\end{aligned}
$$

biçimindedir.

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ ,\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}
$$

$B = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 \end{bmatrix} = I$ başlangıç temel matristir**.**

Dual model,

$$
\begin{aligned}
D:\ \ \min\ Z &= 2V_1 + 3V_2 + 8V_3 \\
V_1 + 2V_2 + 7V_3 &\geq 8 \\
V_1 + 3V_2 + 6V_3 &\geq 9 \\
2V_1 + 4V_2 + 2V_3 &\geq 4 \\
V_i \geq 0\ ,\ i &= 1,2,3
\end{aligned}
$$

dir.

$$\mathbf{V}' = \mathbf{c}_B B^{-1}$$

eşitliğinden dual değişken değerleri belirlenir. Burada,

$\mathbf{c}_B$: Primal modelin en iyi çözüm tablosundaki temel değişkenlerin fiyat değerleri

B^{-1} : Primal modelin en iyi çözüm tablosunda ilk başlangıç temele ilişkin vektörlerin oluşturduğu matris

dir. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}' &= \mathbf{c}_B B^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/9 & -1/9 \\ 0 & 7/9 & -2/9 \\ 0 & -2/9 & 1/3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 5/3 & 2/3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

bulunur. Dual değişken değerleri primal problemin en iyi çözüm tablosundaki gevşek değişkenlere ilişkin $Z_j - c_j$ değerleridir.

Optimal tablo			8	9	4	0	0	0
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	$\mathbf{y}_6$
0	X_4	7/9	0	0	4/3	1	-1/9	-1/9
9	X_2	5/9	0	1	8/3	0	7/9	-2/9
8	X_1	2/3	1	0	-2	0	-2/3	1/3
		$Z=31/3$	0	0	4	0	5/3	2/3

Buradan, dual modelin amaç fonksiyon değeri,

$$\min\ Z=2\times 0+3\times\frac{5}{3}+8\times\frac{2}{3}=\frac{31}{3}$$

bulunur.

$V_1=0 \;\Rightarrow$ 1. kısıtın sağ yan değerinde yapılacak bir birimlik artış amaç fonksiyonunu etkilemez.

$V_2=\frac{5}{3} \;\Rightarrow$ 2. kısıtın sağ yan değerinde yapılacak bir birimlik artış amaç fonksiyonunu $\frac{5}{3}$ birim etkiler (artırır).

$V_3=\frac{2}{3} \;\Rightarrow$ 3. kısıtın sağ yan değerinde yapılacak bir birimlik artış amaç fonksiyonunu $\frac{2}{3}$ birim etkiler (artırır).

Örnek 5:

$$\begin{aligned} D:\ \min\ Z&=6V_1+8V_2+7V_3+15V_4+V_5\\ V_1+V_3+3V_4&\geq 4\\ V_2+V_3+V_4-V_5&\geq 3\\ V_i\geq 0\ ,\ i&=1,2,\ldots,5 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı dual modelin en iyi çözüm tablosu aşağıda verilmiştir.

Optimal tablo			6	8	7	15	1	0	0
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_7$
15	V_4	1/2	1/2	-1/2	0	1	1/2	-1/2	1/2
7	V_3	-1/2	-1/2	3/2	1	0	3/2	1/2	-3/2
		Z = 25	-2	-5	0	0	-4	-4	-3

Bu tablodan yararlanarak, primal modelin en iyi çözümünü elde ediniz.

Çözüm:

Verilen dual model standart halde

$$
\begin{aligned}
D:\ \min\ Z &= 6V_1 + 8V_2 + 7V_3 + 15V_4 + V_5 + 0V_6 + 0V_7 \\
& V_1 + V_3 + 3V_4 - V_6 = 4 \\
& V_2 + V_3 + V_4 - V_5 - V_7 = 3 \\
& V_i \geq 0\ ,\ i = 1,2,\dots,7
\end{aligned}
$$

biçimindedir.

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\quad ,\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

$B = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = I$ başlangıç temel matristir**.**

Simpleks tablo V_1 ve V_2 temel değişkenleri ile en iyi çözüm aramasına başlayıp, V_4 ve V_3 değişkenleri ile sonlanmıştır.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \mathbf{c}_B B^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 15 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Primal model,

$$
\begin{aligned}
P:\ \max\ Z &= 4X_1 + 3X_2 \\
& X_1 \leq 6 \\
& X_2 \leq 8 \\
& X_1 + X_2 \leq 7 \\
& 3X_1 + X_2 \leq 15 \\
& -X_2 \leq 1 \\
& X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

olur. Buna göre,

$\max\ Z = 4 \times 4 + 3 \times 3 = 25$

bulunur.