KONU 6: DUAL SİMPLEKS YÖNTEM

$$P:\ \min\ Z = \mathbf{c}\mathbf{X}$$
$$A\mathbf{X} \geq \mathbf{b} \qquad (6.1)$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

biçiminde tanımlı bir d.p.p.' de, B herhangi bir temel olsun. Bu temel için, simpleks tabloda tüm temel dışı değişkenlere ilişkin tüm $\mathbf{Z} - \mathbf{c} \leq \mathbf{0}$ ise, problem için en iyilik koşulları (dual uygunluk) sağlanmıştır. Ayrıca bu temele ilişkin $\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ oluyorsa, aynı zamanda primal uygunluk da sağlanmıştır. Fakat, bazı durumlarda dual uygunluk sağlandığı halde, primal uygunluk sağlanmayabilir. Bu durumda bulunan $\mathbf{X}_B$ çözümü en iyi olamaz. En iyilik koşullarını bozmadan, $\mathbf{X}_B$ vektöründeki negatif değerleri pozitif hale getirmek için uygulanan yönteme "Dual Simpleks Yöntem" denir. Bu yöntemde çözüme, en iyilik koşullarını sağlayan ancak uygun olmayan bir temel ile başlanır. Bu durumdaki problemi her zaman bulmak kolay değildir. Bu nedenle dual simpleks yöntemin, simpleks yöntem gibi genel bir uygulama alanı yoktur. Özellikle duyarlılık çözümlemesinde oldukça kullanışlı bir yöntemdir.

(6.1) ifadesi ile tanımlı primal model için en iyilik ölçütünün sağlandığı ($\forall\ Z_j - c_j \leq 0$ olması) tablo aşağıdaki gibi olsun.

			c_1	...	c_j	...	c_k	...	c_n	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	...	$\mathbf{y}_j$	...	$\mathbf{y}_k$	...	$\mathbf{y}_n$	
C_{B1}	X_1	X_{B1}	y_{11}	...	y_{1j}	...	y_{1k}	...	y_{1n}	
C_{B2}	X_2	X_{B2}	y_{21}	...	y_{2j}	...	y_{2k}	...	y_{2n}	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
C_{Br}	X_r	X_{Br}	y_{r1}	...	y_{rj}	...	y_{rk}	...	y_{rn}	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
C_{Bm}	X_m	X_{Bm}	y_{m1}	...	y_{mj}	...	y_{mk}	...	y_{mn}	
		Z	$Z_1 - c_1$	...	$Z_j - c_j$	...	$Z_k - c_k$	...	$Z_n - c_n$	≤ 0 sağlandı

Dual uygunluğun sağlandığı yukarıdaki tabloda,

i. Primal uygunluk da sağlanmış ($\mathbf{X}_B \geq \mathbf{0}$) ise, en iyi çözüme ulaşılmıştır.

ii. Primal uygunluk sağlanamamış (en az bir $X_{Br} < 0$) ise, r. kolon ve bu satıra ilişkin n tane kolondan $y_{rk} < 0$ olan kolon pivot eleman olarak seçilir. Dual uygunluğu bozmadan primal uygunluk sağlanıncaya kadar işlemlere devam edilir.

6.1. Dual Simpleks Algoritması

Adım 1: (6.1) idafesi ile tanımlı primal problem için en iyilik koşullarını sağlayan bir B temeli bulunur.

Adım 2: Primal uygunluk da sağlanmış ($\mathbf{X}_B \geq \mathbf{0}$) ise, durulur. Son bulunan çözüm en iyi çözümdür. Aksi halde,

$$X_{Br} = \min\{X_{Bi} : X_{Bi} < 0\} \qquad (6.2)$$

ölçütüne göre temelden çıkacak değişken belirlenir.

Adım 3: Adım 2' de temelden çıkacak değişkene karar verdikten sonra (r değeri belirlendikten sonra), y_{rj} değerlerine bakılır. Eğer, tüm $y_{rj} \geq 0$ ise, durulur. Bu durumda temele alınacak değişken belirlenemez. Verilen primal problemin sınırsız çözümü vardır. Buna göre dual problemin uygun çözümü yoktur. Eğer, $y_{rj} < 0$ ise,

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : \ y_{rj} < 0\right\} \qquad (6.3)$$

ölçütüne göre temele alınacak değişken belirlenir. Burada, y_{rk} pivot elemandır. Simpleks yöntemde tanımlanan pivot eleman ile ilgili işlemler yapılarak Adım 2' den süreç yinelenir.

(6.1) ifadesinde primal problem en büyükleme problemi olduğunda, eşitlik (6.3) ile tanımlı temele alınacak değişken ile ilgili ölçüt

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max\left\{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : \ y_{rj} < 0\right\} \qquad (6.4)$$

biçiminde olur.

Örnek 1:

$$P: \ \min \ Z = 60X_1 + 40X_2$$
$$5X_1 + 4X_2 \geq 6$$
$$10X_1 + 4X_2 \geq 8$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

biçiminde tanımlı d.p.p.' nin dual simpleks yöntem ile en iyi çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Verilen primal problem

$$P: \ \min \ Z = 60X_1 + 40X_2$$
$$-5X_1 - 4X_2 \leq -6$$
$$-10X_1 - 4X_2 \leq -8$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

biçimine dönüştürülür. Standart halde

$$P: \ \min \ Z = 60X_1 + 40X_2 + 0X_3 + 0X_4$$
$$-5X_1 - 4X_2 + X_3 = -6$$
$$-10X_1 - 4X_2 + X_4 = -8$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

olur. Burada,

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 1 & 0 \\ -10 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

dır.

Tablo-I			60	40	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	
0	X_3	-6	-5	-4	1	0	
0	X_4	-8	-10	-4	0	1	
		$Z=0$	-60	-40	0	0	≤ 0 sağlandı

Tablo-I' e göre dual uygunluk sağlandığı halde, primal uygunluk sağlanamamıştır. Buna göre,

$$X_{Br} = \min\{X_{Bi} : X_{Bi} < 0\} = \min\{-6, -8\} = -8$$

olduğundan, X_4 değişkeni temelden çıkar.

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : \ y_{rj} < 0\right\} = \min\left\{\frac{-60}{-10}, \frac{-40}{-4}\right\} = \min\{6, 10\} = 10$$

olduğundan, X_1 değişkeni temele alınır.

Tablo-II			60	40	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	
0	X_3	-2	0	-2	1	-1/2	
60	X_1	4/5	1	2/5	0	-1/10	
		$Z=48$	0	-16	0	-6	≤ 0 sağlandı

Tablo-II' ye göre dual uygunluk sağlandığı halde, primal uygunluk sağlanamamıştır. Buna göre, X_3 değişkeni temelden çıkar. Çünkü, $X_3=-2<0$ dır.

$$\frac{z_k-c_k}{y_{rk}}=\min\left\{\frac{z_j-c_j}{y_{rj}}\ :\ y_{rj}<0\right\}=\min\left\{\frac{-16}{-2},\frac{-6}{-1/2}\right\}=\min\{8,12\}=8$$

olduğundan, X_2 değişkeni temele alınır.

Tablo-III			60	40	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	
40	X_2	1	0	1	1/2	1/4	
60	X_1	2/5	1	0	1/5	-1/5	
		$Z=64$	0	0	-8	-2	≤ 0 sağlandı

Tablo-III' e göre, dual uygunluk ve primal uygunluk sağlanmıştır. Buna göre,

$$\mathbf{X}^*=\begin{bmatrix}2/5\\1\end{bmatrix}\begin{matrix}>0\\>0\end{matrix}\quad \text{ve } Z^*=64$$

olur.

Örnek 2:

$$\begin{aligned} P:\ \max\ Z&=-6X_1-8X_2\\ 4X_1+6X_2&\leq 14\\ 2X_1+2X_2&\geq 10\\ -6X_1+10X_2&\geq 12\\ X_1,\ X_2&\geq 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı d.p.p.‘ nin dual simpleks yöntem ile en iyi çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Verilen primal problem

$$
\begin{aligned}
P:\ & \max\ Z=-6X_1-8X_2\\
& 4X_1+6X_2\le 14\\
& -2X_1-2X_2\le -10\\
& 6X_1-10X_2\le -12\\
& X_1,\,X_2\ge 0
\end{aligned}
$$

biçimine dönüştürülür. Standart halde

$$
\begin{aligned}
P:\ & \max\ Z=-6X_1-8X_2+0X_3+0X_4+0X_5\\
& 4X_1+6X_2+X_3=14\\
& -2X_1-2X_2+X_4=-10\\
& 6X_1-10X_2+X_5=-12\\
& X_i\ge 0\ ,\ i=1,2,\dots,5
\end{aligned}
$$

olur. Burada,

$$
A=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 & 0 & 0\\ -2 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 6 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad ,\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 14\\ -10\\ -12 \end{bmatrix}
$$

dır.

Tablo-I			-6	-8	0	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	
0	X_3	14	4	6	1	0	0	
0	X_4	-10	-2	-2	0	1	0	
0	X_5	-12	6	-10	0	0	1	
		$Z=0$	6	8	0	0	0	≤ 0 sağlandı

Tablo-I' e göre dual uygunluk sağlandığı halde, primal uygunluk sağlanamamıştır. Buna göre,

$X_{Br}=\min\{X_{Bi} : X_{Bi}<0\}=\min\{-10,-12\}=-12$

olduğundan, X_5 değişkeni temelden çıkar.

X_5 değişkeninin bulunduğu satırda (3. satırda) $y_{32}=-10<0$ olduğundan, X_2 değişkeni temele alınır.

Tablo-II			-6	-8	0	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	
0	X_3	34/5	38/5	0	1	0	3/5	
0	X_4	-38/5	-16/5	0	0	1	-1/5	
-8	X_2	6/5	-3/5	1	0	0	-1/10	
		$Z=-48/5$	54/5	0	0	0	4/5	≤ 0 sağlandı

Tablo-II' ye göre dual uygunluk sağlandığı halde, primal uygunluk sağlanamamıştır. Buna göre, X_4 değişkeni temelden çıkar. Çünkü, $X_4=-38/5<0$ dır.

$$\frac{z_k-c_k}{y_{rk}}=\max\left\{\frac{z_j-c_j}{y_{rj}}:\ y_{rj}<0\right\}=\max\left\{\frac{54/5}{-16/5},\frac{4/5}{-1/5}\right\}=\max\{-27/8,-4\}=-27/8$$

olduğundan, X_1 değişkeni temele alınır.

Tablo-III			-6	-8	0	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	
0	X_3	-25/4	0	0	1	19/8	1/8	
-6	X_1	-19/8	1	0	0	-5/16	1/16	
-8	X_2	21/8	0	1	0	-3/16	-1/16	
		$Z=14/8$	0	0	0	27/8	1/8	≤ 0 sağlandı

Tablo-III' e göre dual uygunluk sağlandığı halde, primal uygunluk sağlanamamıştır. Buna göre,

$$X_{Br}=\min\{X_{Bi}: X_{Bi}<0\}=\min\{-25/4,-19/8\}=-25/4$$

olduğundan, X_3 değişkeni temelden çıkar. Fakat, temelden çıkacak değişkenin bulunduğu satırda (1. satır), $y_{rj}<0$ olan bir değişken yoktur. Bu durumda, verilen primal problemin sınırsız çözümü vardır.