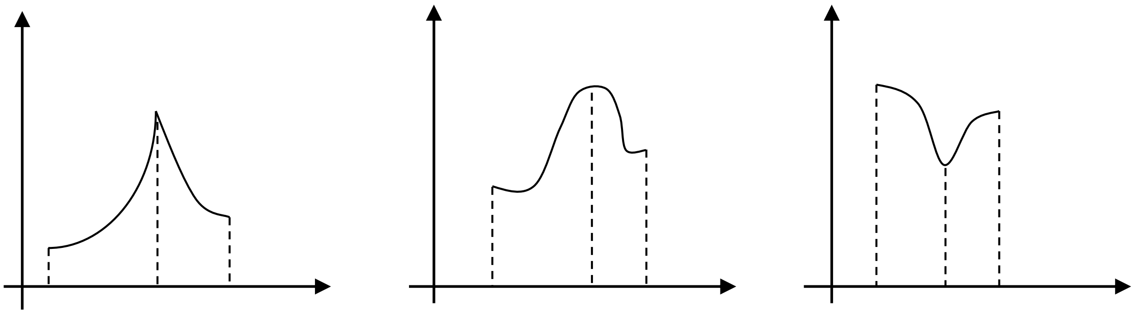
KONU 10: TEK DEĞİŞKENLİ KISITSIZ PROBLEMLER İÇİN TÜREVDEN BAĞIMSIZ OPTİMİZASYON ALGORİTMALARI

Kısıtsız problemlerin optimizasyonunda, herhangi bir kısıtlama olmaksızın bir fonksiyonun maksimum veya minimum değerlerinin elde edilmesi ile ilgilenilir. Tek değişkenli bir $f(x)$ fonksiyonunun en iyi değeri türev hesaplaması kullanılmayan bazı algoritmalar ile de bulunabilir. Bu algoritmalar, "eleme algoritmaları" ve "yaklaştırma algoritmaları" olmak üzere iki başlıkta incelenebilir. Eleme algoritmaları ile en iyi çözümü bulunduran çözüm uzayı daha küçük aralıklara indirgenerek en iyi çözüm araştırılır. Yinelemeli olarak devam eden en iyi çözüm aramalarında, her yinelemede en iyi çözümü bulundurmayan aralık belirlenip çıkarılır ve geri kalan aralıklar üzerinde arama yapılır. Eleme algoritmaları ile optimal çözüme tam olarak ulaşılamamasına rağmen, optimal çözümün bulunduğu aralık mümkün olduğunca daraltılarak, tanımlanan durdurma koşuluna bağlı olarak en iyiye oldukça yakın kabul edilebilir bir çözüm elde edilir. Eleme algoritmalarının uygulanabilmesi için fonksiyonun tek değişkenli ve tek tepeli olması gerekir. Tek tepeli fonksiyonlar, verilen bir tanım aralığında tek bir minimum veya maksimum değere sahip fonksiyonlardır.

$f(x)$ fonksiyonu, x^* noktasında bir minimum değere sahip olsun. Eğer, x^* noktası $[a,b]$ aralığında fakat değeri tam olarak bilinmiyor ise, bu aralığa "belirsizlik aralığı" denir. Fonksiyonu minimum yapan noktanı aranması sırasında, minimum noktayı içermeyen aralıklar çıkarılarak, belirsizlik aralığı daraltılır. Sonlu sayıda yapılan tekrarlı yinelemelerden sonra, belirsizlik aralığı oldukça küçülerek, x^* noktasının yaklaşık en iyi değeri elde edilir.

x^* noktasının aynı tarafında bulunan iki nokta x_1 ve x_2 olsun.

$x_1 < x_2 < x^*$ için $f(x_2) < f(x_1)$ ve $x_2 > x_1 > x^*$ için $f(x_1) < f(x_2)$ ise, $f(x)$ fonksiyonuna tek tepelidir denir.



Şekil 10.1 Tek tepeli fonksiyonlar

$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında minimum değeri elde edilmek istenilen tek tepeli bir fonksiyon olsun. $x_1, x_2 \in [a,b]$ ve $x_1 < x_2$ olduğu varsayılsın.

i. $f(x_1) < f(x_2)$ ise, yeni belirsizlik aralığı $[a, x_2]$

ii. $f(x_1) > f(x_2)$ ise, yeni belirsizlik aralığı $[x_1, b]$

iii. $f(x_1) = f(x_2)$ ise, yeni belirsizlik aralığı $[x_1, x_2]$

olur.

10.1 İkiye Bölerek Arama Algoritması

Adım 0: Küçük bir $\varepsilon > 0$ sabiti, kabul edilebilir bir $d > 0$ bitiş belirsizlik uzunluğu belirlenir.

Adım 1: $[a_k, b_k]$ belirsizlik aralığı merkezine yakın olarak iki nokta ($x_1^{(k)}$ x_1 ve $x_2^{(k)}$)

$$x_1^{(k)} = \frac{a_k + b_k}{2} - \varepsilon \text{ ve } x_2^{(k)} = \frac{a_k + b_k}{2} + \varepsilon$$

olacak biçimde seçilir. Bu iki noktanın amaç fonksiyon değerleri ($f\left(x_1^{(k)}\right)$ ve $f\left(x_2^{(k)}\right)$) hesaplanır.

Adım 2: Bir minimizasyon probleminde,

$f\left(x_1^{(k)}\right) < f\left(x_2^{(k)}\right) \Rightarrow$ yeni belirsizlik aralığı: $[a_{k+1}, b_{k+1}] = \left[a_k, x_2^{(k)}\right]$

$f\left(x_1^{(k)}\right) > f\left(x_2^{(k)}\right) \Rightarrow$ yeni belirsizlik aralığı: $[a_{k+1}, b_{k+1}] = \left[x_1^{(k)}, b_k\right]$

dır.

Bir maksimizasyon probleminde,

$f\left(x_1^{(k)}\right) < f\left(x_2^{(k)}\right) \Rightarrow$ yeni belirsizlik aralığı: $[a_{k+1}, b_{k+1}] = \left[x_1^{(k)}, b_k\right]$

$f\left(x_1^{(k)}\right) > f\left(x_2^{(k)}\right) \Rightarrow$ yeni belirsizlik aralığı: $[a_{k+1}, b_{k+1}] = \left[a_k, x_2^{(k)}\right]$

dır.

Adım 3: $b_k - a_k < d$ ise, durulur. $x^* = (a_k + b_k)/2$ olur. Aksi halde, k yineleme değeri artırılarak (k= k+1), Adım 1' e gidilir.

10.2 Altın Orana Dayalı Arama Algoritması

Adım 0: Kabul edilebilir bir $d > 0$ bitiş belirsizlik uzunluğu belirlenir.

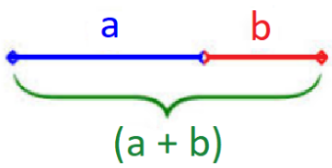
Adım 1: $[a_k, b_k]$ belirsizlik aralığının her iki ucundan altın oranı oranındaki uzaklıkta iki nokta

($x_1^{(k)}$ x_1 ve $x_2^{(k)}$)

$x_1^{(k)} = a_k + (1-\alpha)(b_k - a_k)$ ve $x_2^{(k)} = a_k + \alpha(b_k - a_k)$

olacak biçimde seçilir. Bu iki noktanın amaç fonksiyon değerleri ($f\left(x_1^{(k)}\right)$ ve $f\left(x_2^{(k)}\right)$) hesaplanır. Burada, $\alpha = 0.618$ olup, altın oranı olarak adlandırılır.

NOT : (Altın oranın elde edilmesi)



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$
$$(a+b) \times b = a^2$$
$$a^2 - ab - b^2 = 0$$

a' ya göre kök bulunsun.

$$\Delta = (-b)^2 - 4 \times 1 \times (-b^2) = 5b^2$$

$$a_{1,2} = \frac{-(-b) \mp \sqrt{5b^2}}{2} = \frac{b \mp b\sqrt{5}}{2} = b\left(\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b\left(\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}\right)}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = 1.618 \text{ veya } \frac{a}{b} = -0.618 \text{ bulunur.}$$

Buradan, pozitif oranın tersi (altın oranın tersi) $\frac{1}{1.618} = 0.618$ arama algoritmasında kullanılan sabit sayıdır.

Adım 2: Bir minimizasyon probleminde,

$f\left(x_1^{(k)}\right) > f\left(x_2^{(k)}\right) \Rightarrow$ yeni belirsizlik aralığı: $[a_{k+1}, b_{k+1}] = \left[x_1^{(k)}, b_k\right]$

$x_1^{(k+1)} = x_2^{(k)}$

$x_2^{(k+1)} = a_{k+1} + \alpha\left(b_{k+1} - a_{k+1}\right)$

$f\left(x_1^{(k)}\right) < f\left(x_2^{(k)}\right) \Rightarrow$ yeni belirsizlik aralığı: $\left[a_{k+1}, b_{k+1}\right] = \left[a_k, x_2^{(k)}\right]$

$x_1^{(k+1)} = a_{k+1} + \left(1-\alpha\right)\left(b_{k+1} - a_{k+1}\right)$

$x_2^{(k+1)} = x_1^{(k)}$

dır.

Adım 3: $b_k - a_k < d$ ise, durulur. $x^* = \left(a_k + b_k\right)/2$ olur. Aksi halde, k yineleme değeri artırılarak (k= k+1), Adım 2' de tanımlanan yaklaşım ile nokta-fonksiyon hesaplamaları yapılır.

Altın oranlı arama algoritması kullanılarak yapılan en iyi çözüm aramalarında, yineleme sayısı başlangıçta belirlenebilir. Buna göre, $\left[a_1, b_1\right]$, başlangıç belirsizlik aralığı ve $L_0 = b_1 - a_1$ başlangıç belirsizlik aralık uzunluğu olmak üzere,

$L_n = \alpha^n \times L_0 < d$

olacak biçimde n yineleme sayısı belirlenir.

Örnek 10.1: $\min f\left(x\right) = x + \dfrac{4}{x}$, $0 \le x \le 2$, $\varepsilon = 0.001$, $d = 0.3$ biçiminde tanımlı tek değişkenli fonksiyonun yaklaşık olarak en iyi çözüm değerini ikiye bölerek arama algoritmasını kullanarak elde ediniz.

Çözüm:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(1)} = \dfrac{a_1 + b_1}{2} - \varepsilon = \dfrac{0+2}{2} - 0.001 = 0.999 \quad , \quad f_1^{(1)} = 5.003 \\ \\ x_2^{(1)} = \dfrac{a_1 + b_1}{2} - \varepsilon = \dfrac{0+2}{2} - 0.001 = 1.001 \quad , \quad f_2^{(1)} = 4.997 \end{array}\right\} f_1^{(1)} > f_2^{(1)}$$

olduğundan, yeni belirsizlik aralığı $\left[a_2, b_2\right] = \left[0.999, 2\right]$ olup, $b_2 - a_2 = 2 - 0.999 = 1.001 > d$ dir. 2. yinelemeye geçilir.

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{a_2+b_2}{2} - \varepsilon = \frac{2.999}{2} - 0.001 = 1.4985 \quad , \quad f_1^{(2)} = 4.1678 \\ x_2^{(2)} &= \frac{a_2+b_2}{2} + \varepsilon = \frac{2.999}{2} + 0.001 = 1.5005 \quad , \quad f_2^{(2)} = 4.1663 \end{aligned}\right\} \quad f_1^{(2)} > f_2^{(2)}$$

olduğundan, yeni belirsizlik aralığı $[a_3, b_3] = [1.4985, 2]$ olup, $b_3 - a_3 = 2 - 1.4985 = 0.5015 > d$ dir. 3. yinelemeye geçilir.

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(3)} &= \frac{a_3+b_3}{2} - \varepsilon = \frac{3.4985}{2} - 0.001 = 1.74825 \quad , \quad f_1^{(2)} = 4.0363 \\ x_2^{(3)} &= \frac{a_3+b_3}{2} + \varepsilon = \frac{3.4985}{2} + 0.001 = 1.75025 \quad , \quad f_2^{(3)} = 4.0356 \end{aligned}\right\} \quad f_1^{(3)} > f_2^{(3)}$$

olduğundan, yeni belirsizlik aralığı $[a_4, b_4] = [1.74825, 2]$ olup, $b_3 - a_3 = 2 - 1.74825 \cong 0.25 < d$ dir. Buna göre, en iyi çözüm değeri

$$x^* = \frac{a_4+b_4}{2} = \frac{1.74825+2}{2} = 1.874125$$

biçiminde elde edilir. Buradan, $f(x^*) = f(1.874125) \cong 4$ elde edilir.

Örnek 10.2: $\min f(x) = x^2 + 2x$, $-3 \le x \le 5$, $d = 0.2$ biçiminde tanımlı tek değişkenli fonksiyonun yaklaşık olarak en iyi çözüm değerini altın oranlı arama algoritmasını kullanarak elde ediniz ($\alpha = 0.618$ alınız).

Çözüm:

$$\begin{aligned} L_n &= \alpha^n \times L_0 < d \\ (0.618)^n \times (5-(-3)) &< 0.2 \\ (0.618)^n &< 0.025 \\ n &> 7.6615 \end{aligned}$$

olup, yineleme sayısı $n \cong 8$ alınır.

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)} &= a_1 + (1-\alpha)(b_1 - a_1) = 0.056 \ , \ f_1^{(1)} = 0.115 \\ x_2^{(1)} &= a_1 + \alpha(b_1 - a_1) = 1.944 \ , \ f_2^{(1)} = 7.667 \end{aligned}\right\} f_2^{(1)} > f_1^{(1)}$$

olduğundan, yeni belirsizlik aralığı $[a_2, b_2] = [-3 \, , 1.944]$ olup, $b_2 - a_2 = 4.944 > d$ dir. 2. yinelemeye geçilir.

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(2)} &= a_2 + (1-\alpha)(b_2 - a_2) = -1.112 \ , \ f_1^{(2)} = -0.987 \\ x_2^{(2)} &= x_1^{(1)} = 0.056 \ , \ f_2^{(2)} = 0.115 \end{aligned}\right\} f_1^{(2)} < f_2^{(2)}$$

olduğundan, yeni belirsizlik aralığı $[a_3, b_3] = [-3, 0.056]$ olup, $b_3 - a_3 = 3.056 > d$ dir. 3. yinelemeye geçilir. Devam edilerek yapılan hesaplamalar sonucunda aşağıdaki çizelgede verilen değerler elde edilmiştir.

Yineleme sayısı	a_k	b_k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f_1^{(k)}$	$f_2^{(k)}$
1	-3	5	0.056	1.944	0.115	7.667
2	-3	1.944	-1.112	0.056	-0.987	0.115
3	-3	0.056	-1.832	-1.112	-0.308	-0.987
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
8	-1.208	-0.936	-1.112	-1.032	-0.957	-0.993
9	-1.112	-0.936				

Çizelgedeki sonuçlara göre, en iyi çözüm değeri

$$x^* = \frac{a_9 + b_9}{2} = -1.024$$

olur. Buradan, $f(x^*) = f(-1.024) \cong -1$ elde edilir.