KONU 10: AĞ (ŞEBEKE) ANALİZLERİ - IV

Minimum Maliyetli Akış Algoritması

En küçük maliyetli akış problemi, gerek etkince çözülebildiği ve gerekse uygulama alanının çokluğundan şebeke optimum modelleri arasında oldukça önemlidir. Ulaştırma, atama, aktarma, en kısa yol, maksimum akış algoritmaları minimum maliyetli akış probleminin özel durumlarıdır. Bu tür problemler, doğrusal programlama problemi olarak formüle edilebildiğinden etkince çözülebilmektedir.

- **Matematiksel Model**

n noktalı bir şebekede en az bir düğüm ve istem noktası olsun.

X_{ij} : i den j ye gönderilen akış miktarı

C_{ij} : i den j ye bir birim akışın gönderim maliyeti

u_{ij} : (*i-j*) ayrıtındaki akışların üst sınırı (üst sınır yoksa $u_{ij} = \infty$ olur)

l_{ij} : (*i-j*) ayrıtındaki akışların alt sınırı (alt sınır yoksa $l_{ij} = 0$ olur)

b_i : i noktasındaki net akış veya sunum

b_i değeri, i noktasının özelliğine bağlıdır. i sunum noktası ise, $b_i > 0$ dır. i sunum noktası ise, $b_i < 0$ dır. i aktarma noktası ise, $b_i = 0$ dır.

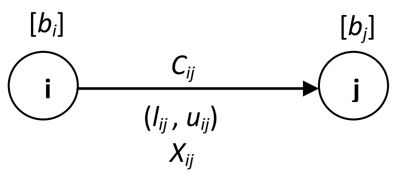
Amaç, verilen istemi sağlamak için şebekede elverişli sunumun toplam gönderim maliyetini minimum yapmaktır.

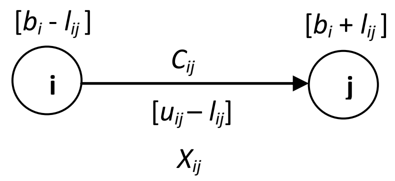
$$\min Z = \sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} - \sum_{j=1}^{n} X_{ji} = b_i$$

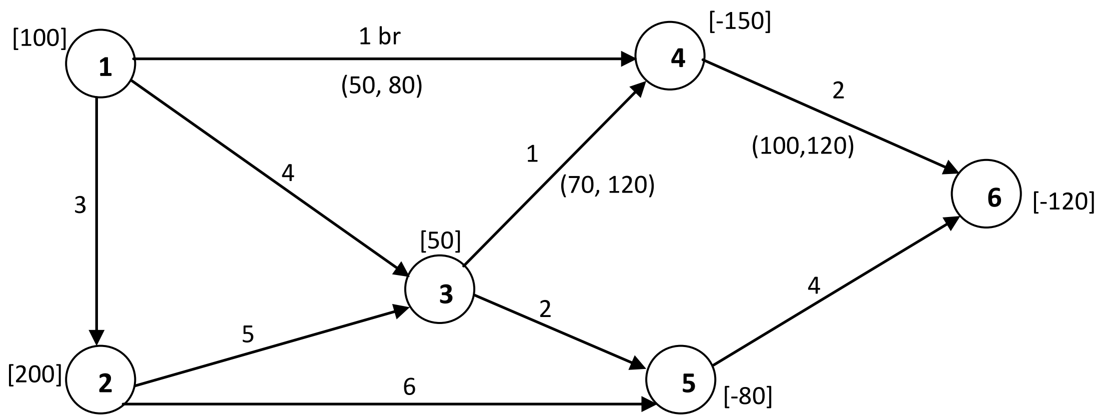
$$l_{ij} \le X_{ij} \le u_{ij}$$

Ayrıca, minimum maliyetli akış probleminde uygun çözüm için gerekli koşul $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$ dir.

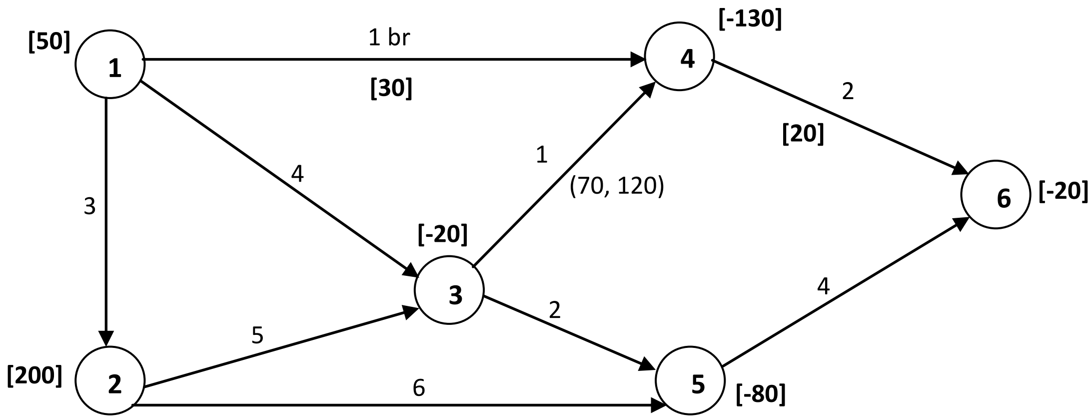




Örnek 10.1: Bir şirket, 3 silodan 3 tavuk çiftliğine mısır temin etmektedir. 3 silodaki üretim miktarları 100, 200 ve 50 bin m^3 tür. 3 çiftlikteki talepler ise, 150, 80 ve 120 bin m^3 tür. Şirket mısırı çiftliklere naklederken, kamyonların kullanıldığı 3 yol dışında genellikle demiryolunu tercih etmektedir. Yollar, silolar arasında bağlantı yapılmasına izin vermektedir. Buna göre, şirketin toplam taşıma maliyetini minimum kılmak için her taşıma yolundan ne miktarda ürünün taşınmasını gerektiğini belirleyen doğrusal programlama modelini oluşturunuz. Şirket, en ucuz maliyetli taşımayı nasıl sağlayabilir?



Çözüm:



Yukarıdaki şebeke için minimum maliyet amaçlı oluşturulabilecek doğrusal programlama problemi aşağıdaki gibidir:

$$\min Z = 3X_{12} + 4X_{13} + X_{14} + 5X_{23} + 6X_{25} + X_{34} + 2X_{35} + 2X_{46} + 4X_{56}$$
$$X_{12} + X_{13} + X_{14} = 50$$
$$-X_{12} + X_{23} + X_{25} = 200$$
$$-X_{13} - X_{23} + X_{34} + X_{35} = -20$$
$$-X_{14} - X_{34} + X_{46} = -130$$
$$-X_{35} - X_{25} + X_{56} = -80$$
$$-X_{46} - X_{56} = -20$$
$$0 \leq X_{14} \leq 30$$
$$0 \leq X_{34} \leq 50$$
$$0 \leq X_{46} \leq 20$$
$$X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{25}, X_{34}, X_{35}, X_{46}, X_{56} \geq 0$$

Tanımlanan minimum maliyet probleminin matematiksel modeli Matlab programında “linprog” komutu ile çözülerek en iyi çözüm değeri elde edilmiştir. Buna göre

X_{12} = 6.7277

X_{13} = 24.7009

X_{14} = 54.2857

X_{23} = 108.7889

X_{25} = 83.6531

X_{34} = 71.4286

X_{35} = 44.9183

X_{46} = 0

X_{56} = 45.7143

olup, Z = 1563.3 dır.