

KONU 12: AĞ (ŞEBEKE) ANALİZLERİ – VI

CPM

2. Kritik Yol Hesaplaması

Şebekede kritik yolu bulmak için programın başlangıcından sonuna kadar giden ayrı yollar bulunabilir. Bu yollar içinde en uzun olanına kritik yol denir ki, bu yolun üzerinde olacak herhangi bir gecikme bütün projenin tamamlanmasını geciktirir.

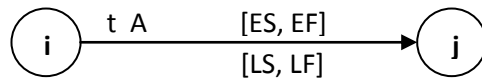
Başlangıç ve bitiş zamanları arasında gevşeklik (bolluk) olmayan faaliyetlere “kritik faaliyetler” denir. Bolluklar, kritik olmayan bir faaliyetin aralığı içerisindeki gevşek zamanlardır.

Projeyi gecikmesiz bitirebilmek için her kritik faaliyet zamanında başlayıp, bitmek zorundadır. Kritik olmayan faaliyetin başlangıç zamanı belirli sınırlar içerisinde öne alınsa veya geciktirilse bile bütünüyle projenin tamamlanma zamanında değişiklik olmaz.

Burada, projenin tamamlanması için gereken toplam süre, proje faaliyetlerinin kritik ve kritik olmayan faaliyetler olarak sınıflandırılması hesaplamaları yapılmalıdır.

Kritik yol hesaplamaları iki yönlüdür:

- (i) İleriye doğru hesaplama (Olayların en erken gerçekleşme zamanları belirlenir.)
- (ii) Geriye doğru hesaplama (Olayların en geç gerçekleşme zamanları belirlenir.)



ES: En Erken Başlama } İleriye doğru hesaplama
EF: En Erken Bitiş }

LS: En Geç Başlama } Geriye doğru hesaplama
LF: En Geç Bitiş }

(i) İleriye doğru hesaplama

Bu hesaplama 1. düğümde başlar ve n . düğüme kadar yinelenir.

Başlangıç adım: Projenin sıfır zamanında başladığını göstermek için $ES=0$ alınır. $EF=ES+t_i$ dir. (i . faaliyet)

j. genel adım: p, q, \dots, v düğümleri tanımlanmış faaliyetler ile j . düğüme doğrudan bağlı ise ve p, q, \dots, v olaylarının ES ve EF zamanları (en erken gerçekleşme zamanları) daha önceden hesaplanmış ise, j olayının en erken gerçekleşme zamanı

$$ES_j = \max \{EF_p, EF_q, \dots, EF_v\}$$

$$EF_j = ES_j + t_j$$

ile hesaplanır. n . düğüm için ES ve EF hesaplandığında ileriye doğru hesaplama tamamlanmış olur.

(ii) Geriye doğru hesaplama

İleriye doğru hesaplama tamamlandıktan sonra, n . düğümde geriye doğru hesaplama başlar ve yinelenerek 1. düğüme geri dönlür.

Başlangıç adım: Projenin en son olayının en erken ve en geç gerçekleşme zamanlarının aynı olduğunu gösterecek biçimde $[ES, EF] = [LS, LF]$ belirlenir.

j. genel adım: p, q, \dots, v düğümleri tanımlanmış faaliyetler ile j . düğüme doğrudan bağlı ise ve p, q, \dots, v olaylarının LS ve LF zamanları (en geç gerçekleşme zamanları) daha önceden hesaplanmış ise, j olayının en geç gerçekleşme zamanı

$$LF_j = \min \{LS_p, LS_q, \dots, LS_v\}$$

$$LS_j = LF_j - t_j$$

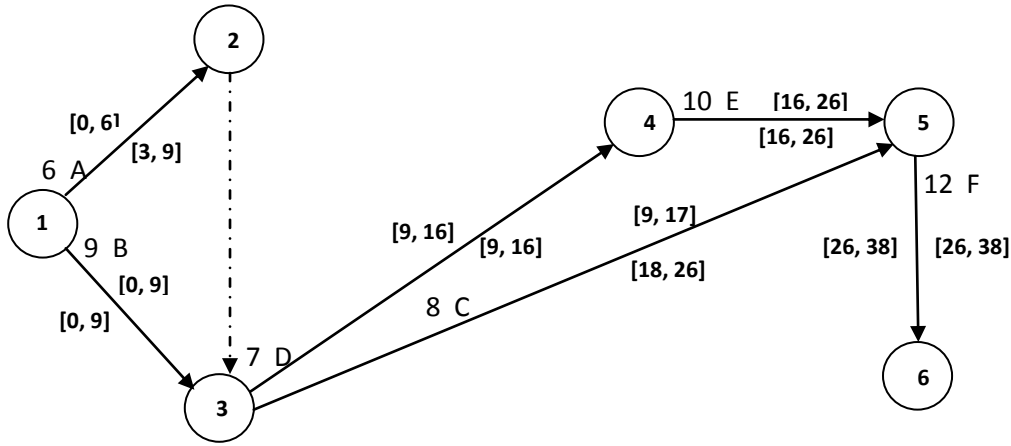
ile hesaplanır. 1. düğüm için LS ve LF hesaplandığında geriye doğru hesaplama tamamlanmış olur.

Önceki hesaplamalar esas alındığında bir (i, j) faaliyeti $[ES, EF] = [LS, LF]$ koşulunu sağlıyorsa kritik faaliyet olacaktır. Şebekenin kritik faaliyetleri başlangıçtan bitişe tüm şebekeyi kapsayan kesintisiz bir yol oluşturmak zorundadır.

Örnek 12.1: Bir şirket yeni bir ürün elde etmek istemektedir. Bu ürün üretilmeden önce Ürün-1 ve Ürün-2' nin oluşturulması gerekmektedir. Daha sonra bu ki ürün birleştirilerek 3. Ürün elde ediliyor. Bu süreç içerisindeki faaliyetler, öncelikler ve süreler aşağıdaki gibidir. Proje için bir ok diyagramı çizerek, kritik yolu belirleyiniz.

Faaliyet Adı	Faaliyet	Öncelikler	Zaman (gün)
A	Eğitim	-	6
B	Hammadde satın alma	-	9
C	Ürün 1	A, B	8
D	Ürün 2	A, B	7
E	Test (Ürün 2)	D	10
F	Ürün 1 ve Ürün 2' nin birleştirilmesi	C, E	12

Çözüm:



B-D-E-F kritik faaliyetlerdir.

Proje, 38 günde tamamlanır.

NOT: (Kritik Yolun Doğrusal Programlama Problemi Olarak Modellenmesi)

X_j : j . düğümde oluşan süre

$$\min Z = X_n - X_1$$

$$X_1 \geq c$$

$$X_j \geq X_i + t_i$$

$$X_1, X_n, X_i, X_j \geq 0$$

Örnek 12.2: Örnek 12.1' de tanımlı problemi doğrusal programlama problemi olarak modelleyiniz.

Çözüm:

$$\min Z = X_6 - X_1$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq X_1 + 6$$

$$X_3 \geq X_1 + 9$$

$$X_3 \geq X_2 + 0$$

$$X_4 \geq X_3 + 7$$

$$X_5 \geq X_3 + 8$$

$$X_5 \geq X_4 + 10$$

$$X_6 \geq X_5 + 12$$

$$X_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 6$$

$$\mathbf{x}^* = [0 \ 9 \ 9 \ 16 \ 26 \ 38]$$

$$Z^* = 38 \text{ gün}$$