GENEL MATEMATİK

FONKSİYONLAR

Ankara Üniversitesi

Tanım 1.1.14. (Örten Fonksiyon)

$f : X \to Y$ fonksiyon olsun. Eğer

$$\mathcal{R}(f) = Y$$

ise f fonksiyonuna örten fonksiyon denir. Bir başka deyişle, f fonksiyonunun örten olması için Y kümesinden alınan her y elemanı X kümesinden alınan en az bir x elemanının görüntüsü olmalıdır.

Örnek 1.1.15.

(i) $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ kuralı ile tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu örtendir. Gösteriniz.
(ii) $f(x) = x^2$ kuralı ile tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu örten değildir. Gösteriniz.

Tanım 1.1.16.

$f : X \to Y$ fonksiyon olsun. Herhangi bir $y \in \mathcal{R}(f)$ elemanı, tanım kümesinin bir tek $x \in \mathcal{D}(f)$ elemanının görüntüsü ise f fonksiyonuna birebir fonksiyon adı verilir. Yani, f fonksiyonunun birebir olması için

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f) \quad \ni \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

ya da

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f) \quad \ni \quad x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

koşulu sağlanmalıdır.

Tanım 1.1.17.

$f : X \to Y$ fonksiyon olsun. f fonksiyonu hem birebir hem de örten ise f fonksiyonuna birebir örten fonksiyon adı verilir.

Örnek 1.1.18.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 2x + 3$ fonksiyonu birebir örten fonksiyondur. Gösteriniz.

Tanım 1.1.19.

$f : X \to X$ fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için

$$f(x) = x$$

ise f fonksiyonuna birim (özdeşlik) fonksiyon denir ve I_X ile gösterilir.

Tanım 1.1.20.

$f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

olarak tanımlı

$$g \circ f : X \to Z$$

fonksiyonuna f fonksiyonu ile g fonksiyonunun bileşkesi adı verilir.

Not 1.1.21.

$g : X \to Y$ ve $f : Y \to Z$ olmak üzere benzer şekilde her $x \in X$ için

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

olarak tanımlanır.

Örnek 1.1.22.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x^2 + 3x$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $g(x) = 2x^2 + 1$ kuralları ile tanımlı f ve g fonksiyonları için

$$g \circ f \quad \text{ve} \quad f \circ g$$

ifadelerini bulunuz.

Tanım 1.1.23.

$f : X \to Y$ fonksiyonu birebir örten fonksiyon olsun. Bu durumda

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{ve} \quad (f \circ g)(y) = y$$

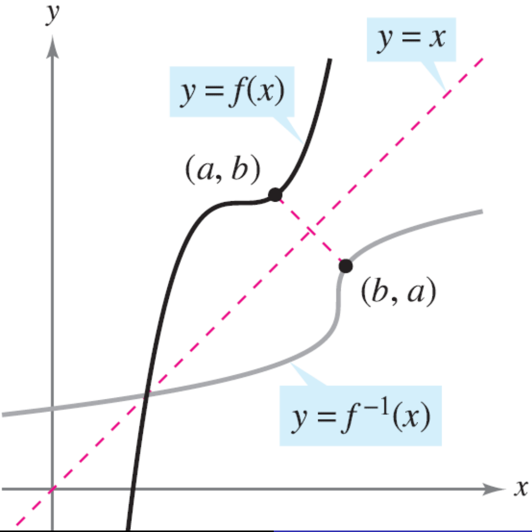
eşitliklerini sağlayan g fonksiyonuna f fonksiyonunun tersi adı verilir ve f^{-1} ile gösterilir. Bu tanıma göre

$$f^{-1} \circ f = I_X \qquad \text{ve} \qquad f \circ f^{-1} = I_Y$$

olacaktır.

Not 1.1.24.

$y = f(x)$ ve $y = f^{-1}(x)$ eğrilerinin grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.


y
x
y = x
y = f(x)
(a, b)
(b, a)
y = f^{-1}(x)

Örnek 1.1.25.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=x^3+1$ fonksiyonunun, eğer varsa, tersini bulunuz.