GENEL MATEMATİK

FONKSİYONLAR

Ankara Üniversitesi

Tanım 1.1.26.

$I \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin

$$x_1 < x_2$$

koşulunu sağlayan herhangi iki elemanı x_1 ve x_2 olsun. Eğer

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna I aralığı üzerinde artandır denir. Bir başka deyişle

$$\forall x_1, x_2 \in I \ \ni \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

olmalıdır. Eğer

$$\forall x_1, x_2 \in I \ \ni \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

sağlanıyorsa f fonksiyonuna I aralığı üzerinde kesin olarak artandır denir.

Tanım 1.1.27.

$I \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin

$$x_1 < x_2$$

koşulunu sağlayan herhangi iki elemanı x_1 ve x_2 olsun. Eğer

$$f(x_2) \leq f(x_1)$$

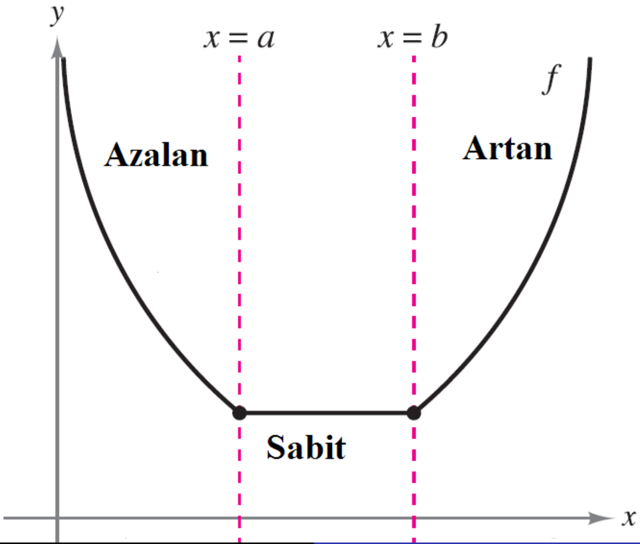
eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna I aralığı üzerinde azalandır denir. Bir başka deyişle

$$\forall x_1, x_2 \in I \ \ni \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

olmalıdır. Eğer

$$\forall x_1, x_2 \in I \ \ni \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

sağlanıyorsa f fonksiyonuna I aralığı üzerinde kesin olarak azalandır denir.


y
x = a
x = b
f
Azalan
Artan
Sabit
x

Tanım 1.1.28.

$I \subseteq \mathbb{R}$ kümesinde f fonksiyonu kesin olarak artan veya kesin olarak azalan ise f fonksiyonuna I kümesinde kesin olarak monoton fonksiyon; aynı küme üzerinde artan veya azalan ise monoton fonksiyon adı verilmektedir.

Örnek 1.1.29.

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f ve g fonksiyonlarının monotonluk durumunu inceleyiniz.

Önerme 1.1.30.

Eğer f fonksiyonu tanım kümesi üzerinde kesin olarak monoton ise bu durumda f fonksiyonu birebirdir.

İspat.

f fonksiyonu kesin olarak artan bir fonksiyon olsun. $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ olmak üzere

$$x_1 \neq x_2$$

ise

$$x_1 < x_2 \quad \text{ya da} \quad x_2 < x_1$$

olacaktır. f fonksiyonu kesin olarak artan olduğundan

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 \text{ ise } f(x_1) < f(x_2) \\ x_2 &< x_1 \text{ ise } f(x_2) < f(x_1) \end{aligned}$$

sağlanıp her iki durumda da $f(x_1) \neq f(x_2)$ olacaktır. Bu ise f fonksiyonunun birebir fonksiyon olduğunu söylemektedir.

Not 1.1.31.

Kesin olarak azalan fonksiyonlar için benzer işlemlerle ispat yapılabilir.

Not 1.1.32.

Bu önermenin karşıtı doğru değildir. Yani, f fonksiyonu birebir ise kesin olarak monoton bir fonksiyon olmak zorunda değildir.
Örneğin;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu birebir bir fonksiyon olup ancak $\mathbb{R}$ üzerinde kesin olarak artan ya da kesin olarak azalan bir fonksiyon değildir.

Tanım 1.1.33.

$f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu orijine göre simetrik bir tanım kümesine sahip (Yani herhangi bir $x \in \mathcal{D}(f)$ elemanı için $-x \in \mathcal{D}(f)$) olsun. Eğer her $x \in \mathcal{D}(f)$ için

$$f(-x) = f(x)$$

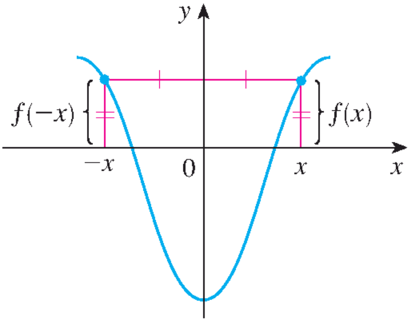
koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna çift fonksiyon,

$$f(-x) = -f(x)$$

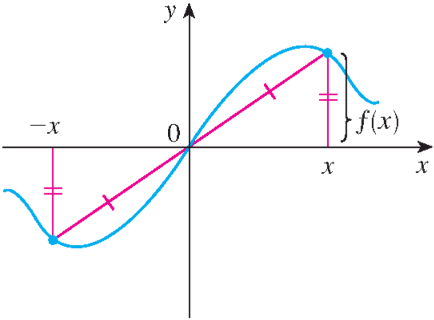
koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna tek fonksiyon denir.

Not 1.1.34.

Çift fonksiyonların grafiği y eksenine göre simetrik, tek fonksiyonların grafiği orijine göre simetriktir.



Çift Fonksiyon



Tek Fonksiyon

Tanım 1.2.1. (Kuvvet Fonksiyonu)

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$f(x) = x^n$$

kuralı ile tanımlı

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonlara kuvvet fonksiyonu adı verilir.

Tanım 1.2.2. (Polinom Fonksiyonu)

$n \in \mathbb{N}$ ve $a_0, a_1, ..., a_n$ sabit reel sayılar öyle ki $a_n \neq 0$ olmak üzere

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

kuralı ile tanımlı

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna polinom fonksiyonu denir, burada n doğal sayısına polinomun derecesi; $a_0, a_1, ..., a_n$ sayılarına da polinomun katsayıları adı verilir.