TEMEL MEKANİK
4

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Dayıoğlu
Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi
Tarım Makinaları ve Teknolojileri Mühendisliği Bölümü

Ders Kitapları:

- Mühendisler İçin Vektör Mekaniği, Statik, Yazarlar: Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston, Elliot R. Eisenberg, 2008, Güven Yayınları, İzmir

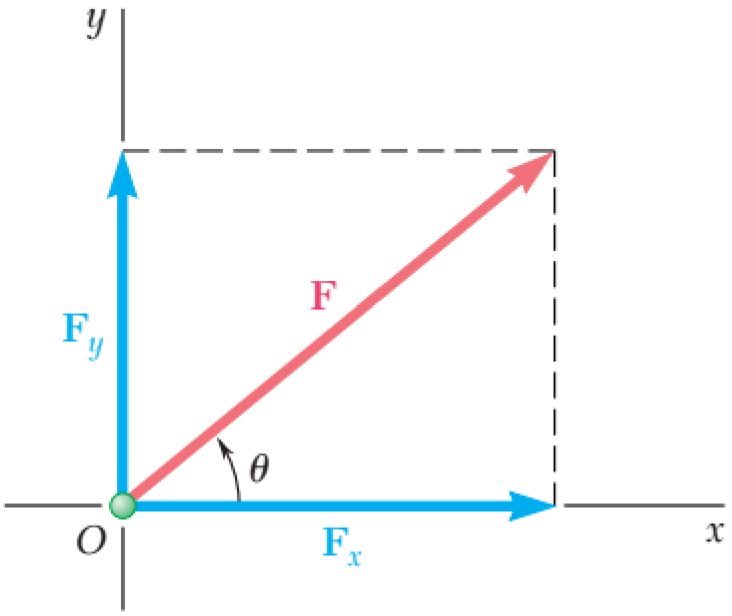
  Çevirenler: Ömer Gündoğdu, Halil Rıdvan Öz, Osman Kopmaz.
- Mühendisler İçin Vektör Mekaniği, Statik, Yazarlar: Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Johnston Jr, David F. Mazurek, 2015, Literatür Yayıncılık, İstanbul,

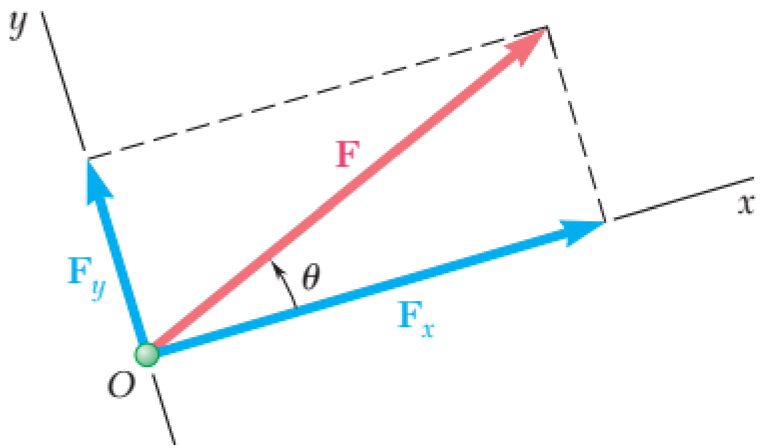
  Çevirenler: Ömer Gündoğdu, Osman Kopmaz.

Diğer Kaynaklar:

- Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Johnston Jr, David F. Mazurek, 2015. Vector Mechanics for Engineers 11e : Statics : SI Units, McGraw Hill, USA.
- Russell C. Hibbeler, 2016. Engineering Mechanics: Statics in SI Units (14e), Pearson Higher Ed USA.

2.2 Kuvvetlerin bileşenlerini ekleme

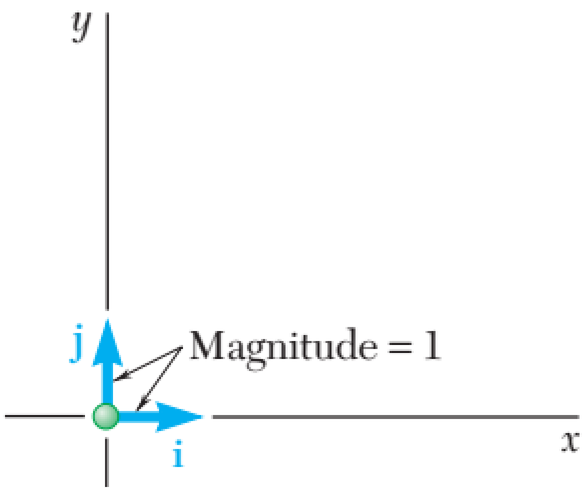




Bir kuvvetin dik bileşenleri

- Bazı problemlerde, bir kuvvetin birbirine dik iki bileşenine ayırmak problemin çözümünde kolaylık sağlamaktadır.
- Şekilde bir **F** kuvvetinin F_x ve F_y bileşenleri gösterilmiştir.
- F_x ve F_y ‘ye dik bileşenler adı verilir.

Bir kuvvetin dik bileşenleri:

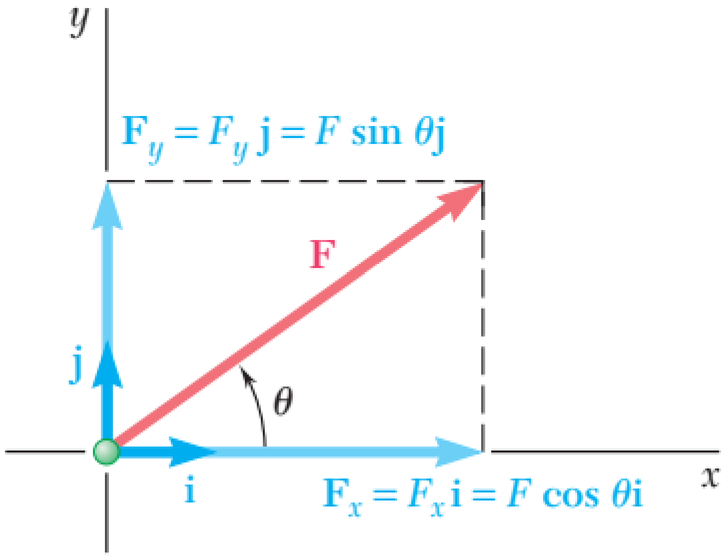


Birim vektörler

- Dik bileşen kullanımını basitleştirmek için, pozitif x ve y yönü boyunca iki birim büyüklükte vektör tanımlanır.
- Bunlara **i** ve **j** ile gösterilen birim vektör adı verilir.

$$\mathbf{F}_x = F_x\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = F_y\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$$



- F_x ve F_y skalerleri $\mathbf{F}_x$ ve $\mathbf{F}_y$ işaretine bağlı olarak pozitif yada negatif olabilir.

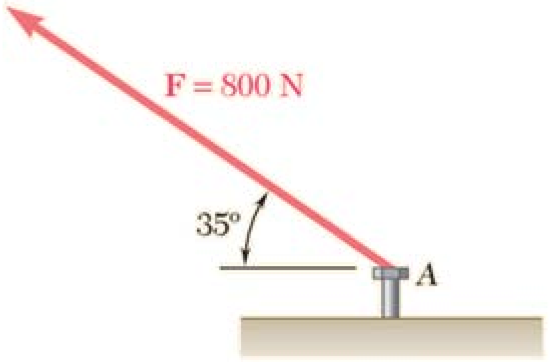
$$F_x = F\cos\theta \qquad F_y = F\sin\theta$$

Skaler bileşenler

F kuvvetinin x ekseni yönündeki F büyüklüğü F ve x ekseni arasındaki θ açısıyla hesaplanır. **F** ‘nin skaler bileşenleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

Kavramsal uygulama 2.1

Şekildeki cıvataya 800 N luk bir kuvvet uygulanmaktadır. Kuvvetin yatay ve dikey bileşenlerini belirleyiniz.

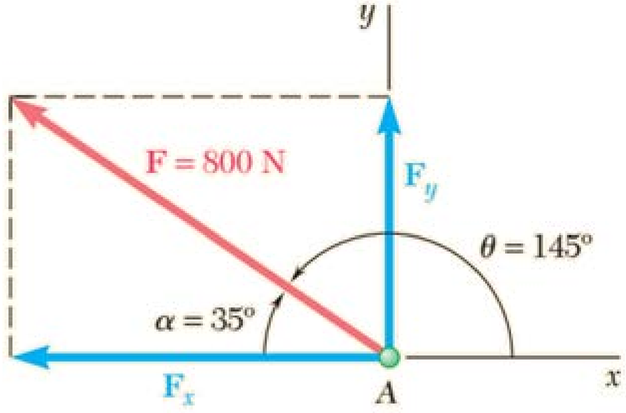


(a)

Çözüm:

F_x'in skaler bileşenleri için doğru işaretin elde edilmesi için θ = 180° - 35 ° = 145 ° yada trigonometrik fonksiyonları kullanarak,

α = 35°



(b)

F nin dik bileşenleri

$$F_x = -F \cos \alpha = -(800 \text{ N}) \cos 35° = -655 \text{ N}$$

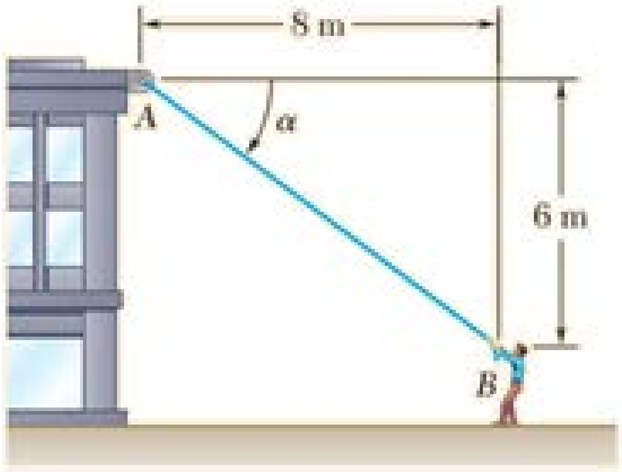
$$F_y = +F \sin \alpha = +(800 \text{ N}) \sin 35° = +459 \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_x = -(655 \text{ N})\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = +(459 \text{ N})\mathbf{j}$$

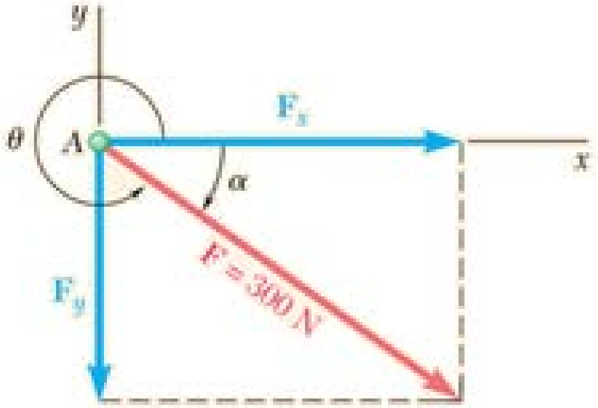
$$\mathbf{F} = -(655 \text{ N})\mathbf{i} + (459 \text{ N})\mathbf{j}$$

Kavramsal uygulama 2.2

Şekildeki adam binanın tepesine takılı bir ipi 300 N'luk kuvvetle çekiyor. A noktasındaki ip tarafından uygulanan kuvvetin yatay ve dikey bileşenlerini bulunuz.



Çözüm:



$$F_x = +(300\ \text{N})\cos\alpha \qquad F_y = -(300\ \text{N})\sin\alpha$$

AB=10 m olduğundan

$$\cos\alpha = \frac{8\ \text{m}}{AB} = \frac{8\ \text{m}}{10\ \text{m}} = \frac{4}{5} \qquad \sin\alpha = \frac{6\ \text{m}}{AB} = \frac{6\ \text{m}}{10\ \text{m}} = \frac{3}{5}$$

$$F_x = +(300\ \text{N})\frac{4}{5} = +240\ \text{N} \qquad F_y = -(300\ \text{N})\frac{3}{5} = -180\ \text{N}$$

$$\mathbf{F} = (240\ \text{N})\mathbf{i} - (180\ \text{N})\mathbf{j}$$

Bir kuvvetin yönü

- **Bir F** kuvvetinin F_x ve F_y dik bileşenleri tanımlandığı zaman, kuvvetin yönünü belirlemek için θ açısını bulabiliriz:

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x}$$

- F kuvvetinin büyüklüğü Pisagor teoremi uygulanarak hesaplanabilir:

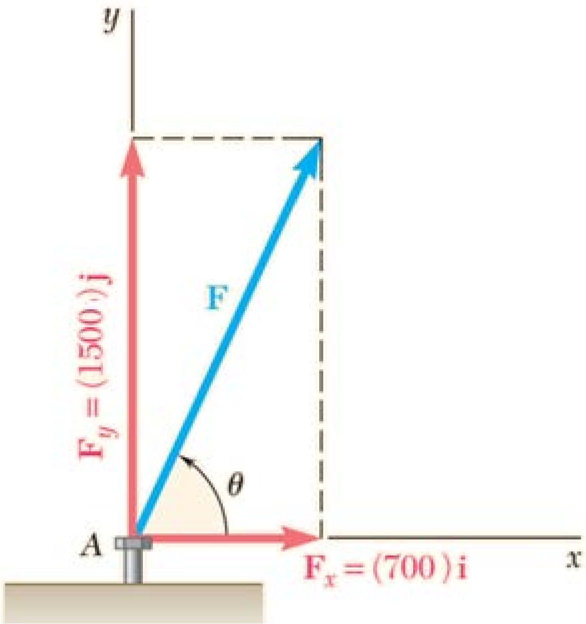
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

- F_x ve F_y bileşenlerini daha önce tanımlamıştık.

$$F_x = F\cos\theta \qquad F_y = F\sin\theta$$

Kavramsal uygulama 2.3

Şekildeki cıvataya **F**=700 **i** + 1500 **j** (N) kuvveti uygulanmaktadır. Kuvvetin büyüklüğünü ve yatayla yaptığı θ açısını bulunuz.

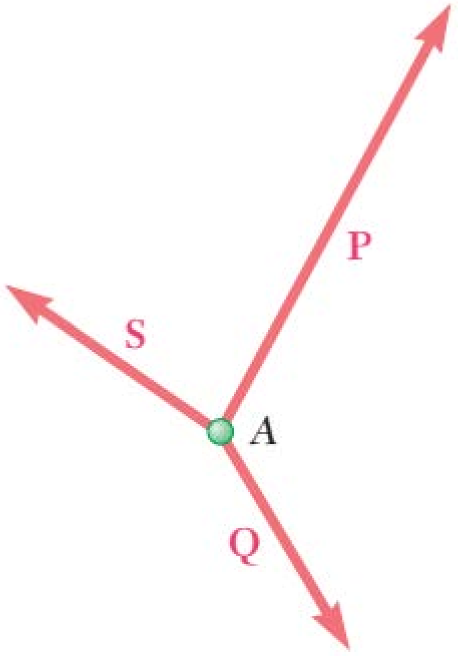


$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{1500}{700}$$

$$\theta = 65.0°.$$

$$F = \frac{F_y}{\sin\theta} = \frac{1500}{\sin 65.0°} = 1655\ \mathrm{N}$$

x ve y bileşenlerini toplayarak kuvvetleri ekleme



- Bir A parçacığı üzerine etkiyen üç **P**, **Q** ve **S** kuvvetini örnek olarak alalım. Bunların R bileşkesi vektörel olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S}$$

- Her bir kuvveti dik bileşenler olarak yeniden yazarsak;

$$\begin{aligned} R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} &= P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + S_x\mathbf{i} + S_y\mathbf{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x)\mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y)\mathbf{j} \end{aligned}$$

$$R_x = P_x + Q_x + S_x$$

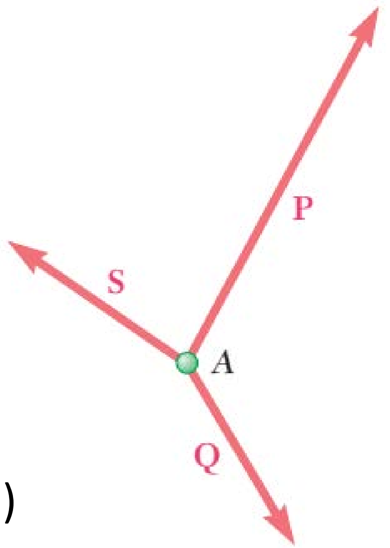
$$R_y = P_y + Q_y + S_y$$

yada

$$R_x = \Sigma F_x$$

$$R_y = \Sigma F_y$$

x ve y bileşenlerini toplayarak kuvvetleri ekleme



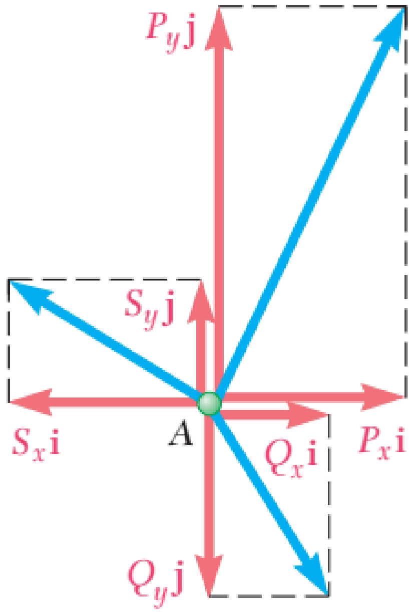
(a)

- R bileşke vektörü 3 aşamada elde edilir:

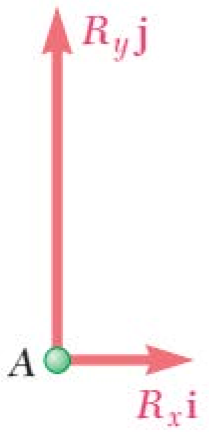
1. Şekil (a)'da verilen kuvvetler şekil (b) 'deki gibi x ve y bileşenlerine ayrılır:

2. Bileşke **R** vektörünün x ve y bileşenlerini elde etmek için birbirine eklenir.

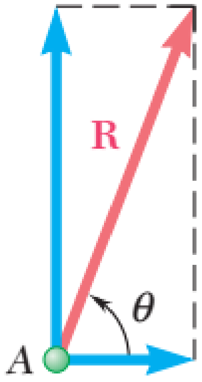
3. $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$ bileşke vektörünü belirlemek için paralel kenar yasası uygulanır.



(b)

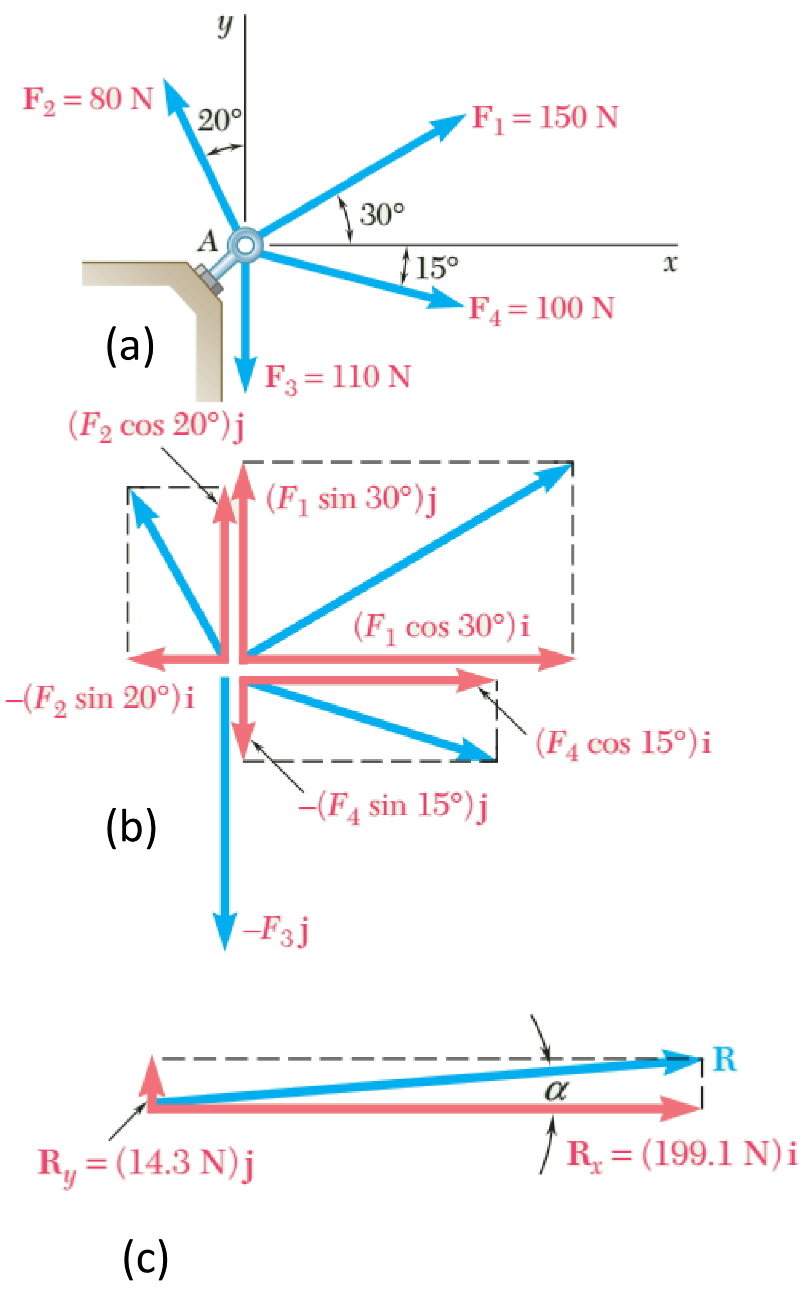


(c) bileşenlerin toplanması



(d)

Örnek Problem 3:



Şekilde gösterilen halkaya dört kuvvet etkimektedir. Halkadaki bileşke kuvveti bulunuz.

Strategy: Dört kuvvetin bileşenlerini eklemek en basit yöntemdir.

Modeling: Tablodaki gibi her kuvvetin büyüklüğünü ve x-, y- bileşenlerini yazarsak daha kolay çözüm sağlayabiliriz. Her kuvvetin x, y bileşenleri trigonometri ile belirlenir (şekil b). Sağa doğru x bileşeni ve yukarı yönde y bileşeni pozitif olarak gösterilir.

Analysis

Force	Magnitude, N	x Component, N	y Component, N
$\mathbf{F}_1$	150	+129.9	+75.0
$\mathbf{F}_2$	80	−27.4	+75.2
$\mathbf{F}_3$	110	0	−110.0
$\mathbf{F}_4$	100	+96.6	−25.9
		$R_x = +199.1$	$R_y = +14.3$

Dört kuvvetin **R** bileşkesi $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$

$$\mathbf{R} = (199.1 \text{ N})\mathbf{i} + (14.3 \text{ N})\mathbf{j}$$

Bileşkenin büyüklüğü ve yönü:

$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14.3 \text{ N}}{199.1 \text{ N}} \qquad \alpha = 4.1° \qquad R = \frac{14.3 \text{ N}}{\sin\alpha} = 199.6 \text{ N}$$

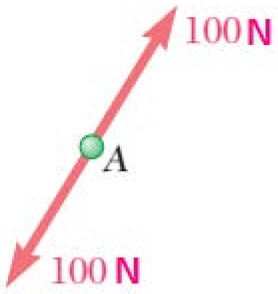
$$\mathbf{R} = 199.6 \text{ N} \measuredangle 4.1°$$

Düşün- Taşın muhakeme et ! Analizi kontrol et

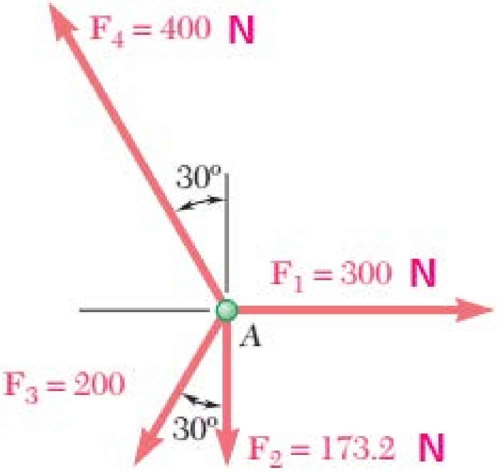
2.3 Bir Düzlemde Kuvvetler ve Denge

Bir parçacığın dengesi

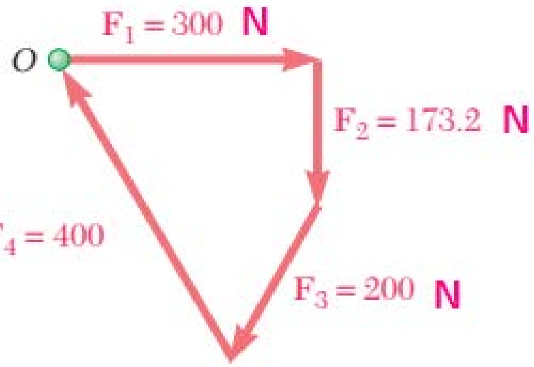
- Bir parçacığa etki eden tüm kuvvetlerin bileşkesi **sıfır** olduğunda, parçacık denge halindedir.
- Bir parçacığa aynı büyüklükte aynı etki çizgisinde, ancak ters yönde etkiyorsa, parçacık denge halindedir. (Şekil a)
- Şekil (b ve c)'de gösterilen diğer bir denge halinde, poligon kuralı kullanarak F_1 … F_4 dört kuvvetin bileşkesini bulabiliriz.



(a)



(b)



(c)

A parçacığının dengesinin grafiksel gösterimi:

O noktasından başlayarak, sırasıyla F_1 , F_2 , F_3 , F_4 vektörleri arka arkaya yerleştirirsek R bileşkesi yine sıfırdır.

2.3 Bir Düzlemde Kuvvetler ve Denge

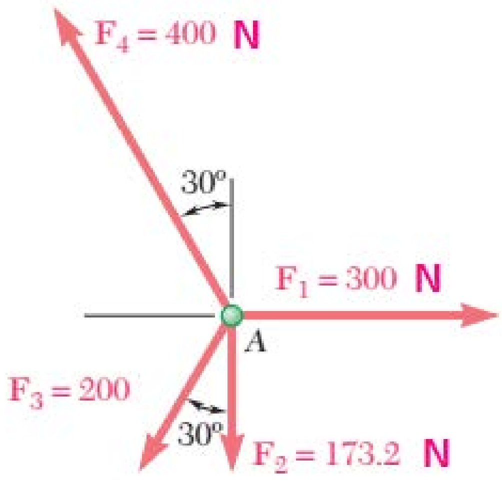
Bir parçacığın dengesi

A parçacığının dengesinin cebirsel gösterimi:

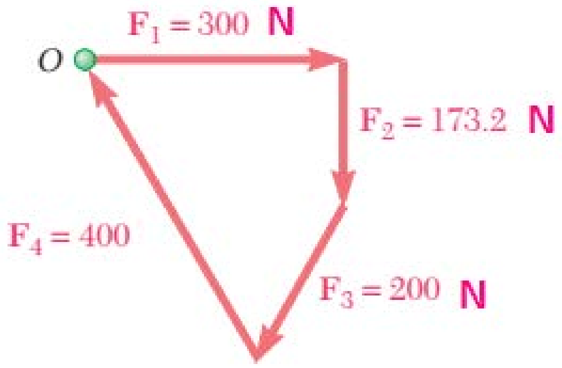
$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = 0$$

$$\Sigma\,(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}) = 0 \qquad \text{or} \qquad (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$$



(a)



(b)

$$\Sigma F_x = 300 - (200)\sin 30° - (400)\sin 30° = 300 - 100 - 200 = 0$$

$$\Sigma F_y = -173.2 - (200)\cos 30° + (400)\cos 30° = -173.2 - 173.2 + 346.4 = 0$$

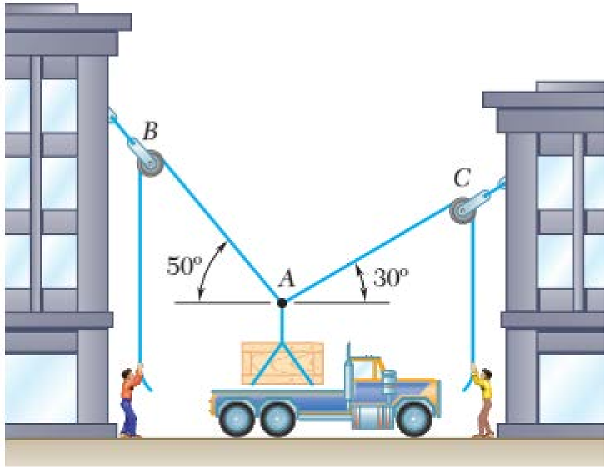
1. Newton yasası

Bir parçacık üzerine etkiyen bileşke kuvvet sıfırsa, parçacık hareketsiz kalacaktır; yada ilk ilerleme çizgisinde sabit hızda hareket edecektir.
Statik problemlerinin çoğunda, denge durumunun analizi için Newton'un 1. yasasını kullanırız.

Serbest Cisim diyagramları ve Problem Çözümü

Uygulamada, mühendislik mekaniğindeki bir problem gerçek fiziksel konulardan türetilmektedir. Problemin fiziksel koşullarının görsel çizimi uzay diyagramı olarak bilinir. Gerçek yapıları kapsayan bir çok problem bir parçacık dengesiyle ilgili problemlere indirgenebilir. Yöntem parçacığı seçmek ve bu parçacığın üzerine etkiyen kuvvetleri ayrı diyagram halinde çizmektir. Bu diyagrama **Serbest Cisim Diyagramı** adı verilir.

Serbest Cisim diyagramları ve Problem Çözümü



(a)

Örnek:

Şekilde gösterilen 75 kg'lık sandık iki bina arasında B ve C noktalarındaki makaralardan geçerek A noktasında iki çelik halatla bağlı şekilde dengede durmaktadır. AB ve AC halatlarının her birindeki gerilmeyi bulacağız.

Bu problemi çözmek için, ilk olarak parçacığın denge halinde olduğunu gösteren Serbest Cisim Diyagramını (SCD) çizelim.

A noktasının SCD şekil (b)'de gösterilmiştir.

Dikey halat tarafından A noktasına ve iki halata etkiyen kuvvetler gösterilmiştir.

Halat tarafından iletilen kuvvet aşağı yöndedir. Büyüklüğü sandığın ağırlığına (W) eşittir.

$$W = mg = (75 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 736 \text{ N}$$

İki halat tarafından uygulana kuvvetler bilinmiyor. Bu kuvvetler sırasıyla AB ve AC halatlarındaki gerilmelere eşit olduğu için T_{AB} ve T_{AB} ile gösterilmiştir.

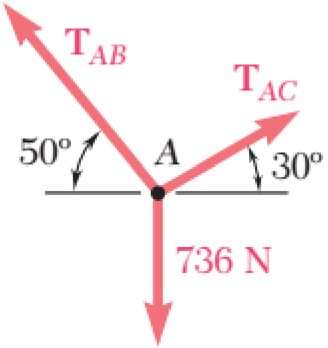
A noktası denge hainde olduğu için, kuvvetler A'dan uzaklaşacak şekilde çizilir.

Bu üç vektör uç uca birleştirilerek kapalı üçgen formu oluşturulmalıdır. Şekil (c) de gösterilen kuvvet üçgeni çizilir. Bu **geometrik** çözümdür.

Çözümü **trigonometrik** olarak bulmak için **sinüs yasası** uygulanır:

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60°} = \frac{T_{AC}}{\sin 40°} = \frac{736 \text{ N}}{\sin 80°}$$

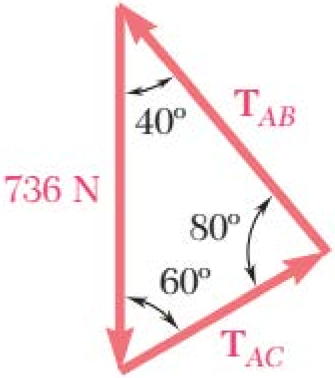
$$T_{AB} = 647 \text{ N} \qquad T_{AC} = 480 \text{ N}$$



(b) Serbest Cisim Diyagramı

Analitik çözüm için denge denklemleri uygulanır:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$$



(c) Kuvvet üçgeni

Örnek Problem 4:

Şekilde gösterilen halkaya dört kuvvet etkimektedir. Halkadaki bileşke kuvveti bulunuz.

Strategy: Dört kuvvetin bileşenlerini eklemek en basit yöntemdir.

Modeling: Tablodaki gibi her kuvvetin büyüklüğünü ve x-, y- bileşenlerini yazarsak daha kolay çözüm sağlayabiliriz. Her kuvvetin x, y bileşenleri trigonometri ile belirlenir (şekil b). Sağa doğru x bileşeni ve yukarı yönde y bileşeni pozitif olarak gösterilir.

(a)

Analysis

Force	Magnitude, N	x Component, N	y Component, N
$\mathbf{F}_1$	150	+129.9	+75.0
$\mathbf{F}_2$	80	−27.4	+75.2
$\mathbf{F}_3$	110	0	−110.0
$\mathbf{F}_4$	100	+96.6	−25.9
		$R_x = +199.1$	$R_y = +14.3$

Dört kuvvetin **R** bileşkesi $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$

$$\mathbf{R} = (199.1 \text{ N})\mathbf{i} + (14.3 \text{ N})\mathbf{j}$$

(b)

Bileşkenin büyüklüğü ve yönü:

$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14.3 \text{ N}}{199.1 \text{ N}} \qquad \alpha = 4.1° \qquad R = \frac{14.3 \text{ N}}{\sin\alpha} = 199.6 \text{ N}$$

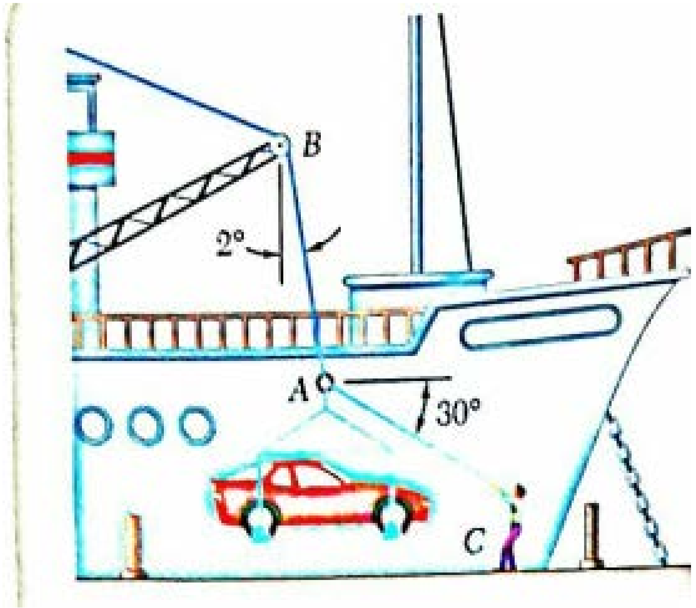
$$\mathbf{R} = 199.6 \text{ N} \measuredangle 4.1°$$

(c)

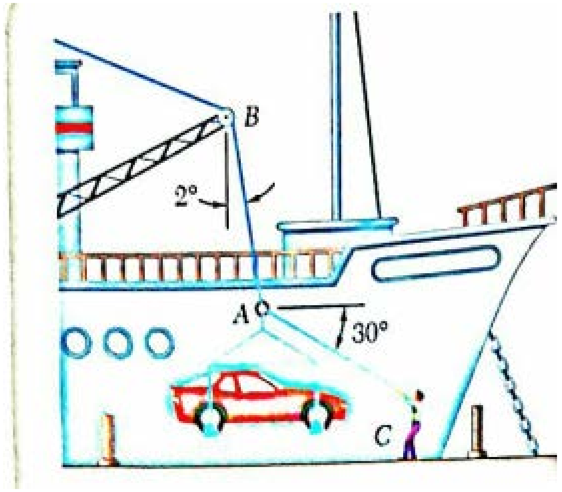
Düşün- Taşın muhakeme et ! Analizi kontrol et

Örnek Problem 2.4:

Şekildeki gemiden 3500 N'luk otomobil halatla taşınarak indirilmektedir. Kabloya A noktasından halat yatayla 30° lik açı yapacak şekilde bir kişi tarafından çekilmektedir. B noktasından çekilen halatın dikeyle yaptığı açı 2° olduğuna göre, halata uygulanan çekme kuvvetini bulunuz?



Örnek Problem 2.4:

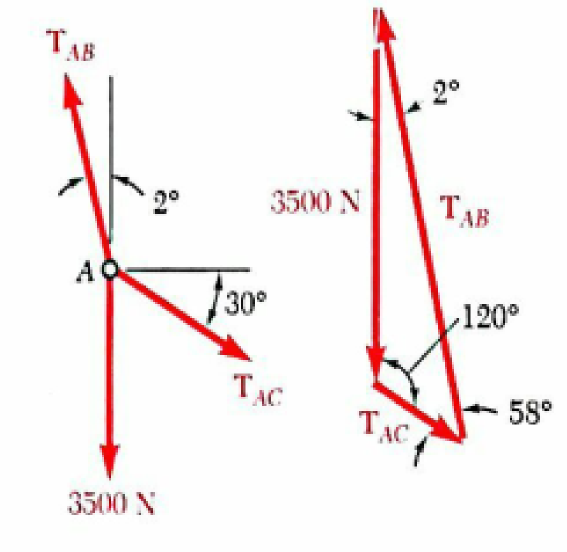


Çözüm

Serbest Cisim Diyagramı. *A* noktası serbest cisim olarak alınmış ve se best cisim diyagramı tam olarak çizilmiştir. *AB* kablosundaki çekme kuvve T_{AB} ve halattaki çekme kuvveti T_{AC}'dir.

Denge : Serbest cisim üzerinde sadece üç kuvvet etki ettiğinde cismin dengede olduğunu göstermek için bir kuvvet üçgeni çizeriz. Sinüs te remini kullanarak

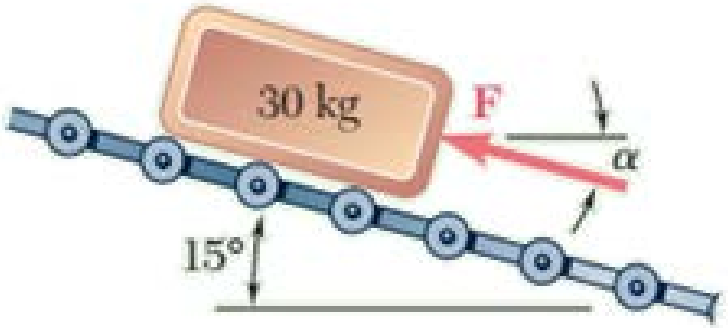
$$\frac{T_{AB}}{\sin 120°} = \frac{T_{AC}}{\sin 2°} = \frac{3500\text{ N}}{\sin 58°}$$



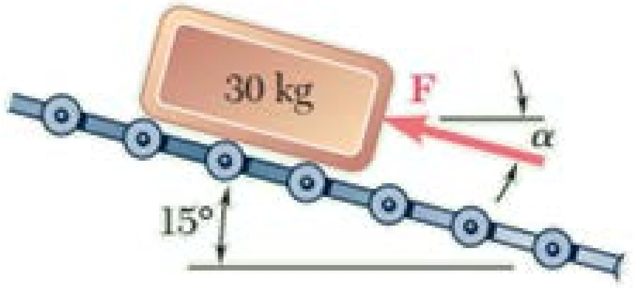
$T_{AB} = 3574\text{ N}$ $\qquad$ $T_{AC} = 144\text{ N}$

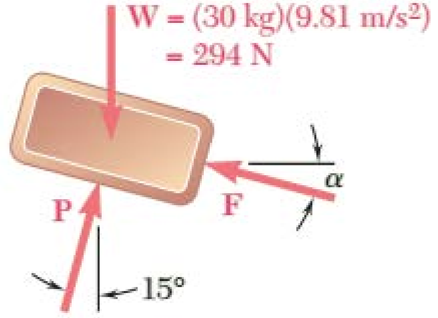
Örnek Problem 2.5:

Şekilde gösterilen kutuyu dengede tutacak en küçük **F** kuvvetin büyüklüğü ve yönünü bulunuz. Küçük tekerlerin kutuya uyguladığı kuvvet eğik yüzeye diktir.

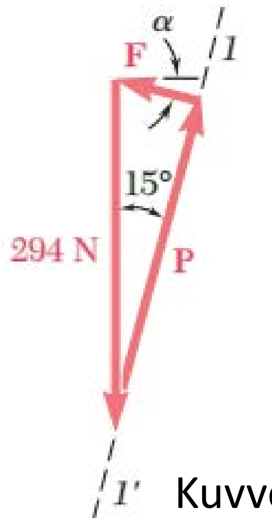


Örnek çözüm 2.5:





SCD



Kuvvet üçgeni

Denge koşulları:
Serbest cisim diyagramında üç kuvvet etkidiği için kuvvet üçgenini çizeriz.
1-1’ çizgisi **P** nin biline doğrultusunu temsil eder.
F kuvvetinin minimum değerini elde etmek için F kuvvetinin doğrultusunu P nin doğrultusuna dik çizeriz. Elde edilen üçgen geometrisinden

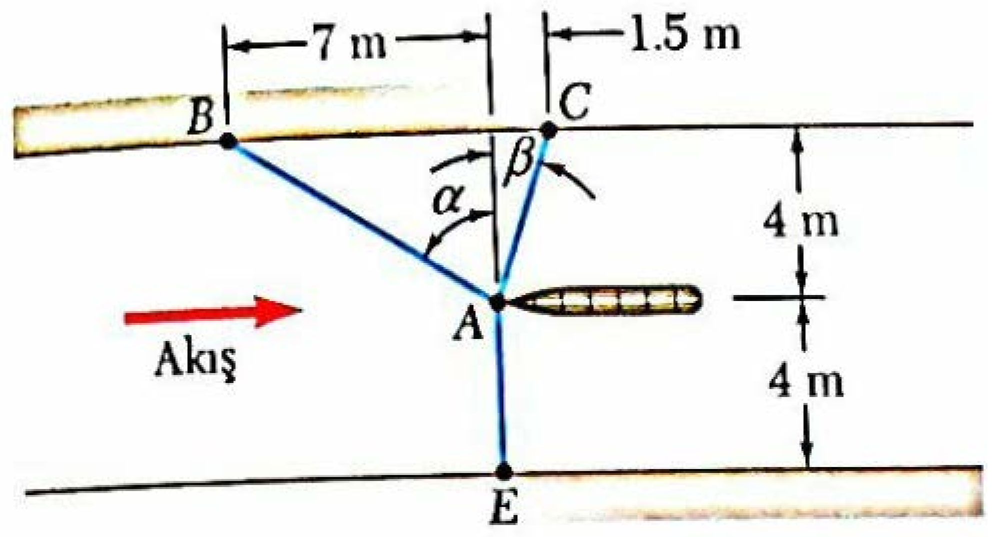
$$F = (294\ \text{N}) \sin 15^\circ = 76.1\ \text{N} \qquad \alpha = 15^\circ$$

$$\mathbf{F} = 76.1\ \text{N} \measuredangle 15^\circ$$

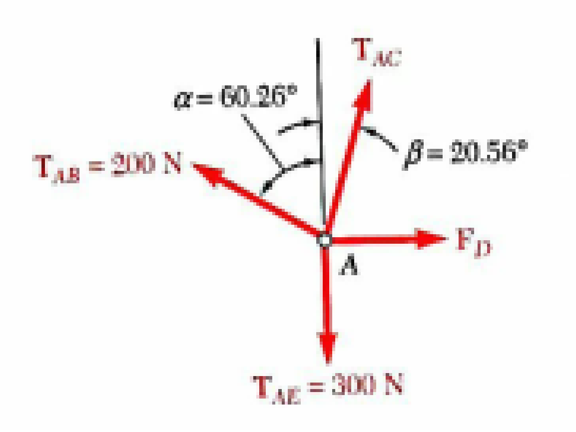
Bulunur.

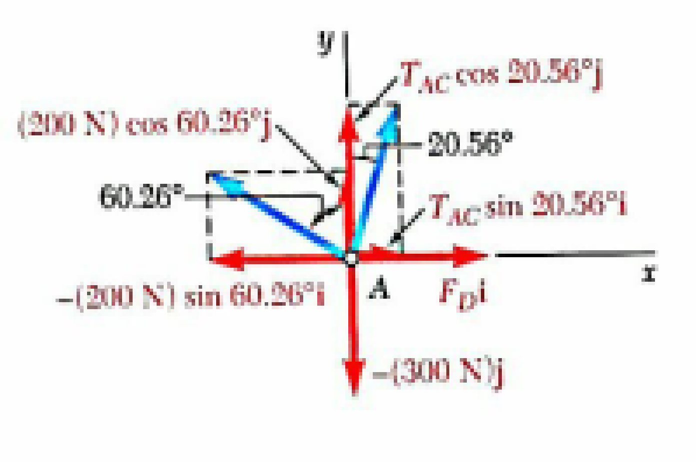
Örnek Problem 2.6:

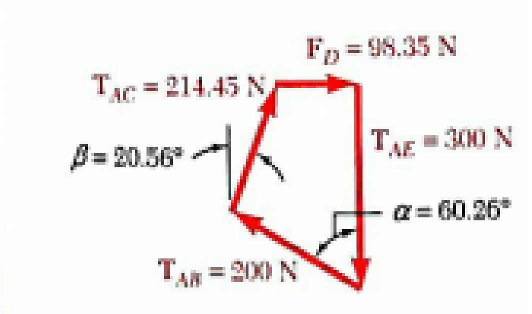
Bir yelkenlinin baş kısmını deney kanalının merkezinde tutmak için 3 halat kullanılmıştır. AB halatında 200 N ve AE halatında 300 N çekme kuvvetleri ölçülmüştür.
AC halatındaki çekme kuvvetini hesaplayınız?



Örnek çözüm 2.6:







α ve β açıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\tan\alpha = \frac{7\text{ m}}{4\text{ m}} = 1.75 \qquad \tan\beta = \frac{1.5\text{ m}}{4\text{ m}} = 0.375$$

$$\alpha = 60.26° \qquad \beta = 20.56°$$

Serbest cisim diyagramı çizilir.

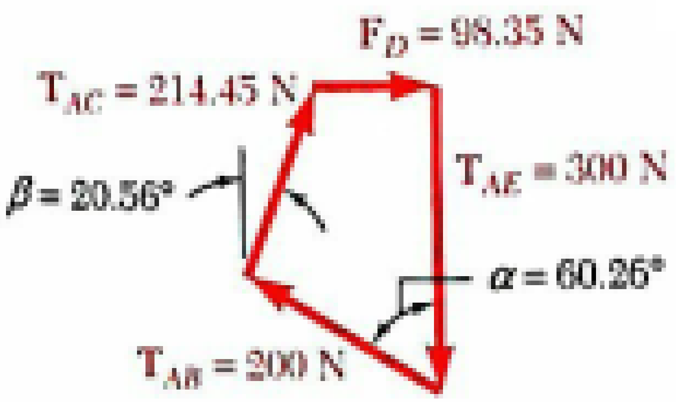
Denge eşitliği:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AE} + \mathbf{F}_D = 0 \qquad (1)$$

Üçten fazla kuvvet olduğu için kuvvetleri x ve y bileşenlerine ayırınız:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{AB} &= -(200\text{ N})\sin 60.26°\mathbf{i} + (200\text{ N})\cos 60.26°\mathbf{j} \\
&= -(173.66\text{ N})\mathbf{i} + (99.21\text{ N})\mathbf{j} \\
\mathbf{T}_{AC} &= T_{AC}\sin 20.56°\mathbf{i} + T_{AC}\cos 20.56°\mathbf{j} \\
&= 0.3512T_{AC}\mathbf{i} + 0.9363T_{AC}\mathbf{j} \\
\mathbf{T}_{AE} &= -(300\text{ N})\mathbf{j} \\
\mathbf{F}_D &= F_D\mathbf{i}
\end{aligned}$$

Örnek çözüm 2.6:



$$(-173.66\ \text{N} + 0.3512T_{AC} + F_D)\mathbf{i} + (99.21\ \text{N} + 0.9363T_{AC} - 300\ \text{N})\mathbf{j} = 0$$

$$(\Sigma F_x = 0:) \qquad -173.66\ \text{N} + 0.3512T_{AC} + F_D = 0 \qquad (2)$$

$$(\Sigma F_y = 0:) \qquad 99.21\ \text{N} + 0.9363T_{AC} - 300\ \text{N} = 0 \qquad (3)$$

$$T_{AC} = +214.45\ \text{N}$$

$$F_D = +98.35\ \text{N}$$