TEMEL MEKANİK
6

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Dayıoğlu
Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi
Tarım Makinaları ve Teknolojileri Mühendisliği Bölümü

Ders Kitapları:

- Mühendisler İçin Vektör Mekaniği, Statik, Yazarlar: Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston, Elliot R. Eisenberg, 2008, Güven Yayınları, İzmir

  Çevirenler: Ömer Gündoğdu, Halil Rıdvan Öz, Osman Kopmaz.
- Mühendisler İçin Vektör Mekaniği, Statik, Yazarlar: Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Johnston Jr, David F. Mazurek, 2015, Literatür Yayıncılık, İstanbul,

  Çevirenler: Ömer Gündoğdu, Osman Kopmaz.

Diğer Kaynaklar:

- Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Johnston Jr, David F. Mazurek, 2015. Vector Mechanics for Engineers 11e : Statics : SI Units, McGraw Hill, USA.
- Russell C. Hibbeler, 2016. Engineering Mechanics: Statics in SI Units (14e), Pearson Higher Ed USA.

3- Rijit Cisimler: Eşdeğer kuvvet sistemleri

Bu bölümde;

- Bir kayan vektör olarak iş görecek bir kuvvet sağlayan iletkenlik prensibinin,
- Bir noktanın çevresinde bir kuvvetin momentini tanımlamayı,
- Momenti kapsayan analizlerde vektör ve skaler çarpımların yapılmasını,
- Belirli bir momentin analizini kolaylaştırmak için Varignon teoremini uygulamayı,
- Bir eksen etrafında bir kuvvetin momentini almak için karışık üçlü çarpımı tanımlamayı,
- Bir kuvvet çiftinin momentini tanımlamayı ve …
- Başka bir noktada eşdeğer kuvvet çifti sistemindeki belirli bir kuvvetin çözümü,
- Kuvvetler sistemini eşdeğer kuvvet çifti sistemine indirgemeyi,
- Kuvvetler sistemini tek bir kuvvete indirgenebildiği durumların uygulanmasının,

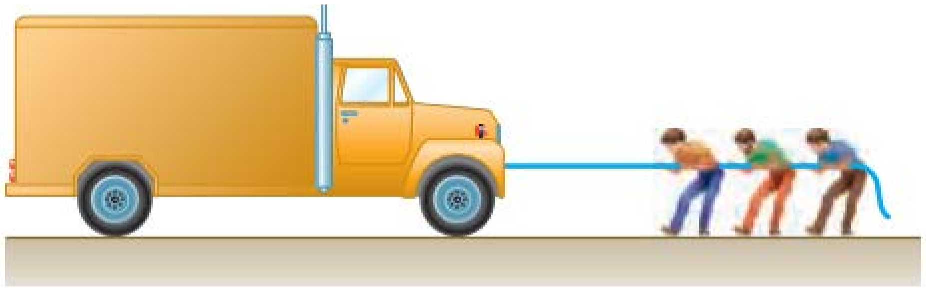
öğretilmesi amaçlanmıştır.

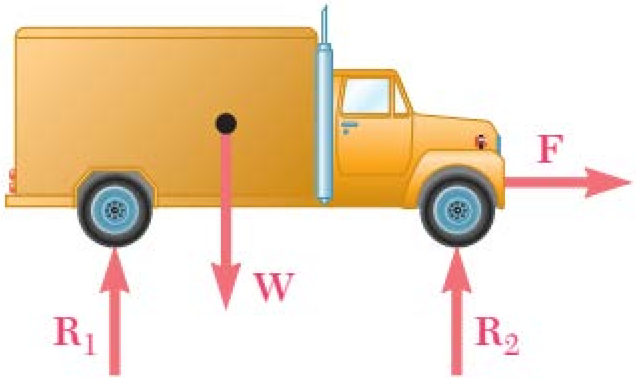
3.1 Kuvvetler ve Momentler

Rijit cisimler üzerine etkiyen kuvvetler iki gruba ayrılabilir: Dış kuvvetler, İç kuvvetler

- **Dış kuvvetler:**

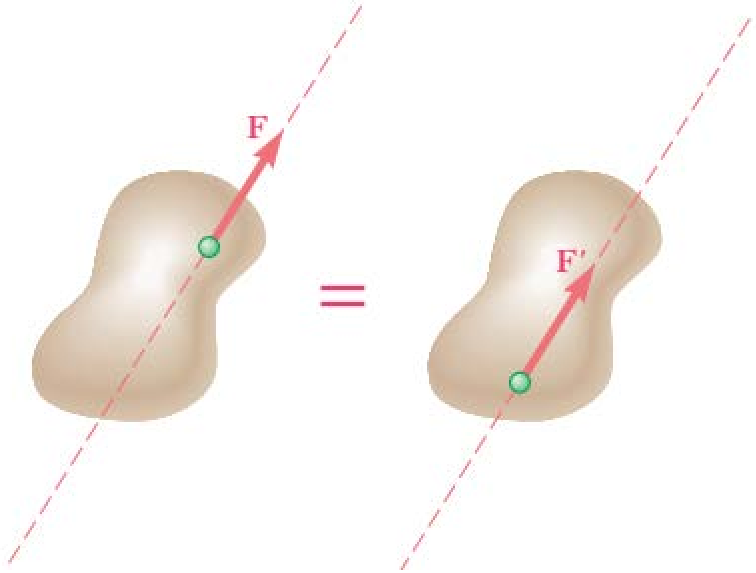
Dış kuvvetlere örnek olarak şekilde gösterilen kamyonun ön tamponuna bağlanan halatı üç kişinin çekmesi verilmiştir. Kamyon üzerine etkiyen dış kuvvetler serbest cisim diyagramında gösterilmiştir. İlk olarak kamyonun ağırlığı göz önüne alınır. Kamyonu oluşturan parçacıkların herbirine yerkürenin çekim etkisi uygulanmasına karşın, ağırlık tek bir **W** kuvveti ile gösterilebilir. Bu kuvvetin uygulama noktası kuvvetin etkidiği kamyonun ağırlık merkezidir. W ağırlığı kamyonu aşağı yönde dikey hareket ettirmeye zorlar. Gerçekte, zemin $\mathbf{R}_1$ ve $\mathbf{R}_2$ reaksiyonları ile kamyonun hareket etmesine karşı koyar. Bu kuvvetler zemin tarafından uygulanan dış kuvvetlerdir. Halatı çekenler kamyon üzerine uygulama noktasının ön tampon olduğu F kuvvetini uygular. F kuvveti kamyonun düz hat üstünde hareket etmesini sağlar. Kamyonun bu ileri hareketi **yer değiştirme** olarak tanımlanır. Diğer kuvvetler kamyonun farklı şekilde hareketine neden olabilir. Örneğin, ön dingilin altına yerleştirilen bir kriko tarafından uygulanan kuvvet, aracın arka dingilinin etrafında dönmesine neden olur. Bu esasen dönme hareketidir. Bu nedenle, katı bir cisim üzerinde etkiyen her dış kuvvet, karşı konulmazsa, katı cisme bir yer değiştirme veya dönüş hareketi, yada veya her ikisini de verebilir.





İletilebilirlik İlkesi: Eşdeğer kuvvetler

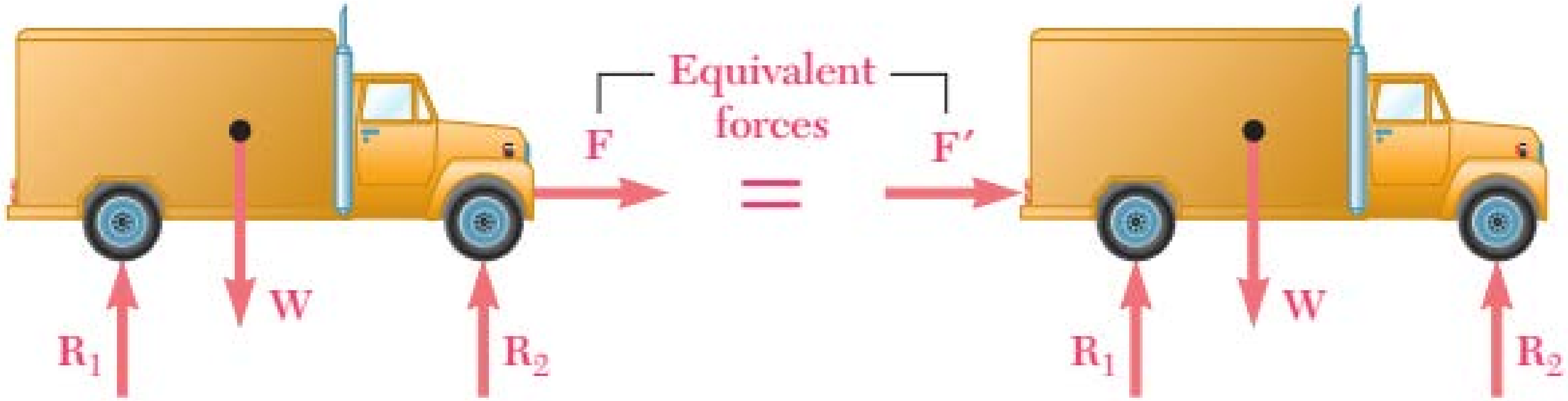
Bir rijit cismin belirli bir noktasına etkiyen bir **F** kuvvetinin yerine, aynı büyüklükte, aynı doğrultuda ve aynı yönde olan bir **F**’ kuvveti cismin başka noktasına uygulanırsa, rijit cismin denge ve hareketinde değişiklik olmaz. **F** ve **F**’ kuvvetleri rijit cisim üzerinde benzer etkiye sahiptir. Bunlar eşdeğer kuvvetler olarak ifade edilir.



Rijit cisimlerin statiği konusundaki çalışmalarımızı üç ilkeye, paralel kenar yasası (vektör eklenmesi), Newton’un 1. yasası ve iletilebilirlik ilkesi, dayalı olarak yaparız.

İletilebilirlik İlkesi: Eşdeğer kuvvetler

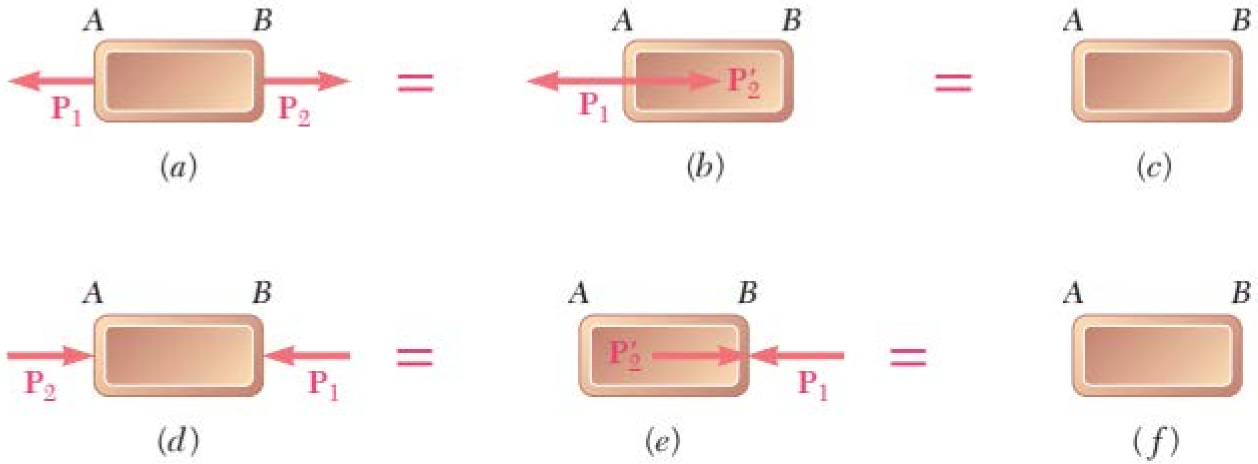
- Kamyon örneğine tekrar dönersek, şekilde gösterildiği gibi, kamyonun hem ön hem de arka tamponundan geçen yatay çizgisinin F kuvvetinin etki çizgisiyle aynı olduğunu gözlemliyoruz. iletilebilirlik ilkesini kullanarak, **F** kuvvetini arka tampona etkiyen eşdeğer kuvvet F’ ile yer değiştirebiliriz. Yani, bu insanlar ön tampondan çekme yerine, arka tampondan iterlerse, hareket koşulları bundan etkilenmez ve kamyon üzerine etkiyen tüm dış kuvvetler (**W**, $\mathbf{R}_1$ ve $\mathbf{R}_2$) değişmeden kalır.



İletilebilirlik İlkesi: Eşdeğer kuvvetler

İletilebilirlik ilkesi ve eşdeğer kuvvetler kavramı sınırlamalara sahiptir. Örnek olarak, şekil (a) da gösterildiği gibi AB çubuğuna eşit ve ters yönde $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ kuvvetlerinin etkidiğini göz önüne alalım. İletilebilirlik İlkesine göre, aynı büyüklüğe sahip $\mathbf{P}_2$ kuvvetini $\mathbf{P'}_2$ kuvveti ile yer değiştirebiliriz (Şekil b). Aynı parçacık üzerine etkiyen $\mathbf{P}_1$ **ve** $\mathbf{P'}_2$ kuvvetleri birbirine eşit ve ters yönde olup; bunların toplamı sıfırdır. Çubuğun dış davranışı açısından, şekil a'da gösterilen kuvvetler sisteminin tümünde hiçbir eşdeğer kuvvet yoktur. (Şekil c).

Şekil (c) de gösterilen AB çubuğuna eşit ve ters yönde $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P}_2$ kuvvetlerinin etkidiğini göz önüne alalım. Aynı büyüklük, aynı yön ve aynı etki hattı üstünde, ancak A yerine B'ye etkiyen $\mathbf{P}_2$ kuvvetini $\mathbf{P'}_2$ kuvveti ile yer değiştirebiliriz (Şekil e). $\mathbf{P}_1$ ve $\mathbf{P'}_2$ kuvvetlerini toplayabiliriz eve onların toplamı sıfırdır.



Vektör Çarpımları

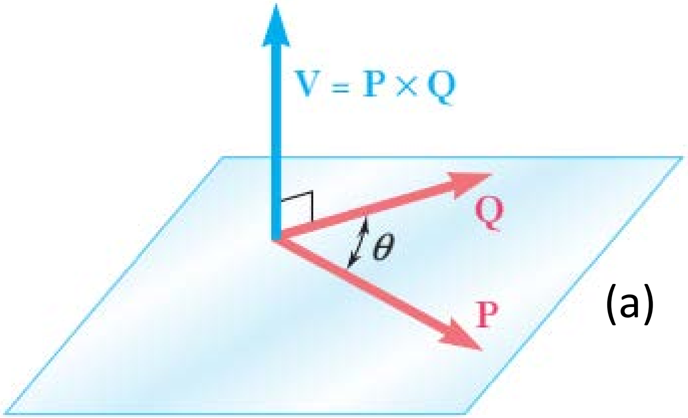
Rijit bir cisim üzerinde bir kuvvetin etkisini en iyi şekilde anlatmak için, yeni bir kavramı açıklamamız gerekir:

Bir nokta çevresinde bir kuvvetin momenti

Bu kavramı açık şekilde anlatmak için matematiksel araçları, iki vektörün çarpımı gibi işlemleri kullanırız.

P ve **Q** iki vektörün vektörel çarpımı sonucunda bir **V** vektörü elde edilir ve aşağıdaki aşağıda sıralanan noktalar vurgulanabilir:

1. **V**’nin etki çizgisi **P** ve **Q** ‘nun bulunduğu düzleme diktir (Şekil a).



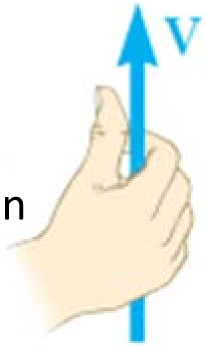
(a)

2. **V**’nin büyüklüğü P ve Q’nun büyüklüğü ile **P** ve **Q** arasında oluşan θ açısının sinüsünün çarpımına eşittir.

Vektör çarpımının büyüklüğü $V = PQ \sin \theta$

3. **V** vektörünün yönü sağ el kuralına göre elde edilir.

Vektör çarpımı $\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$

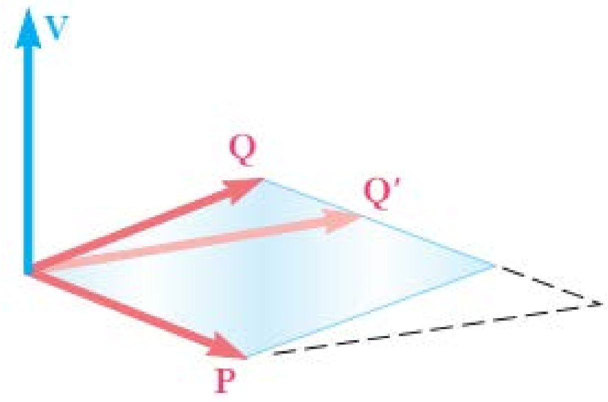


Parmaklar, **P**'den **Q**'ya doğru kıvrılmaktadır.

Başparmak yönü **V** ‘nin yönünü gösterir.

Vektör Çarpımları

V vektörünün büyüklüğü, **P** ve **Q** dan oluşan paralel kenarın alanına eşittir. **Q** yu **Q**‘ ne değiştirirseniz, paralelkenarın şekli değişir; ancak **P** ve alan aynı kalır; dolayısıyla, **V**’nin büyüklüğü aynı kalır.



(a)

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}'$$

Vektör çarpımında **P** ve **Q** yer değiştirilirse, **P** x **Q** **-V** vektörüyle gösterilir.

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$$

Vektör çarpımında dağılma özelliği aşağıdaki gibi uygulanır:

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2$$

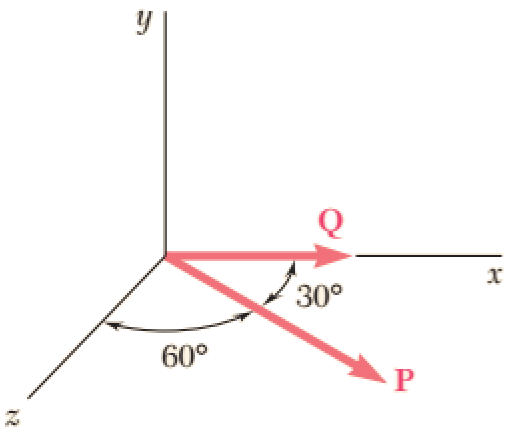
Birleştirme özelliği vektör çarpımında uygulanmaz.

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{S} \neq \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{S})$$

Kavramsal uygulama

Şekilde gösterilen **P** ve **Q** vektörlerinin vektörel çarpımını **V** = **P** x **Q** vektörlerin büyüklüklerine göre hesaplayınız.

P=6 N ve Q=4 N.

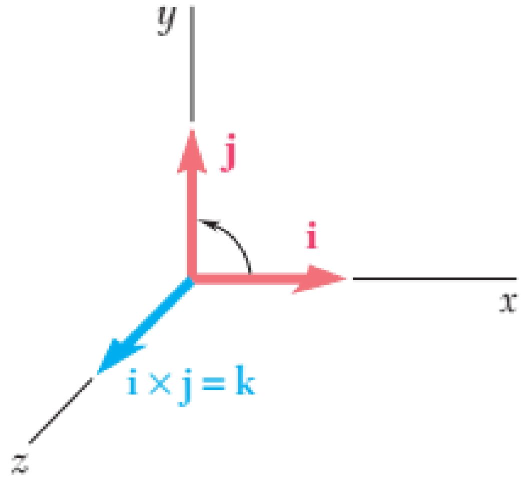


Çözüm:

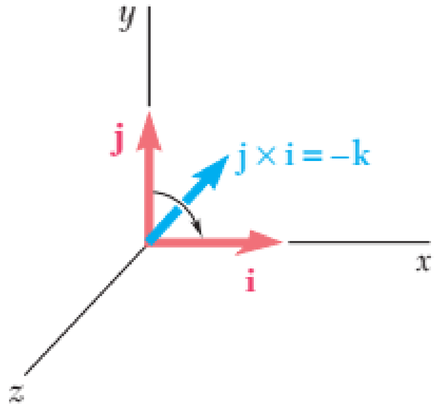
$$V = PQ \sin \theta = (6)(4) \sin 30° = 12\,\mathrm{N}$$

Vektör Çarpımlarının Dik bileşenleri

(a)



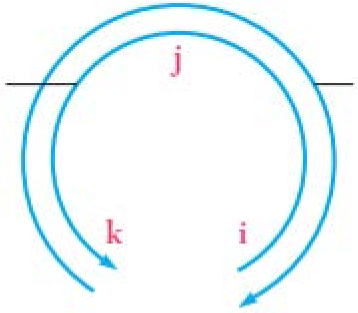
i ve **j** birim vektörlerinin vektörel çarpımlarının sonucu **k** birim vektörüdür.



j ve **i** birim vektörlerinin vektörel çarpımlarının sonucu -**k** birim vektörüdür.

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Birim vektör çarpımları bu yönde pozitiftir.



Birim vektör çarpımları bu yönde negatiftir.

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \times (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k})$$

Vektör Çarpımlarının Dik bileşenleri

Verilen **P** ve **Q** vektörlerinin vektörel çarpımında elde edilen **V** vektörü bu vektörlerin dik bileşenlerine göre tanımlanabilir: (a)

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \times (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k})$$

$$\mathbf{V} = (P_yQ_z - P_zQ_y)\mathbf{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\mathbf{j} + (P_xQ_y - P_yQ_x)\mathbf{k}$$

Vektör çarpımının dik bileşenleri

$$V_x = P_yQ_z - P_zQ_y$$
$$V_y = P_zQ_x - P_xQ_z$$
$$V_z = P_xQ_y - P_yQ_x$$

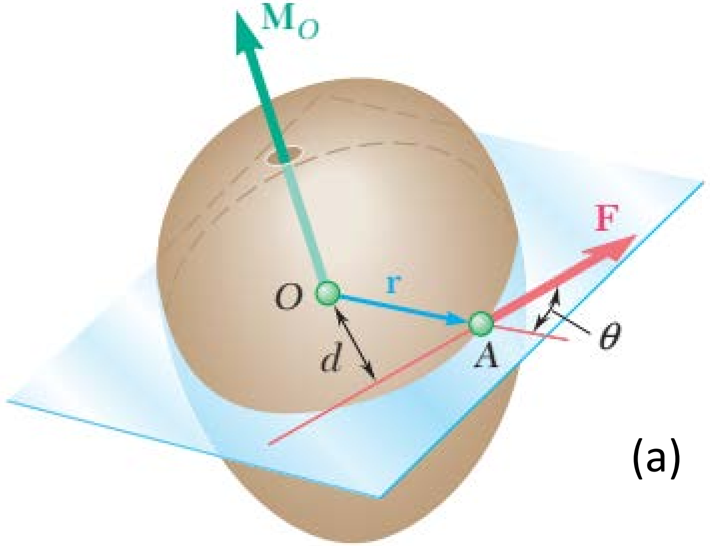
Vektör çarpımının determinant gösterimi

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

Bir noktaya uygulanan kuvvetin momenti

- Şekil (a) da Rijit cisme etkiyen bir **F** kuvveti göz önüne alalım. Biliyoruz ki, **F** kuvveti büyüklük ve yönü tanımlayan bir vektörle gösterilir.
- Ancak, rijit cisim üzerinde kuvvetin etkisi A uygulama noktasına da bağlıdır.
- A’nın konumu **r** vektörüyle gösterilir.
- **r**’nin büyüklüğü OA arasındaki mesafeye karşılık gelir.
- **r** vektörüne konum vektörü adı verilir.
- Konum vektörü **r** ve kuvvet vektörü **F** şekil (a) da gösterilen düzlem üzerinde bulunur.
- **r** ve **F** nin vektörel çarpımıyla, F’nin O etrafındaki momentini tanımlamış oluruz:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



(a)

Parmaklar, **r**'den **F**'ye doğru kıvrılmaktadır.

Başparmak yönü $\mathbf{M}_O$ ‘nin yönünü gösterir.

(b)

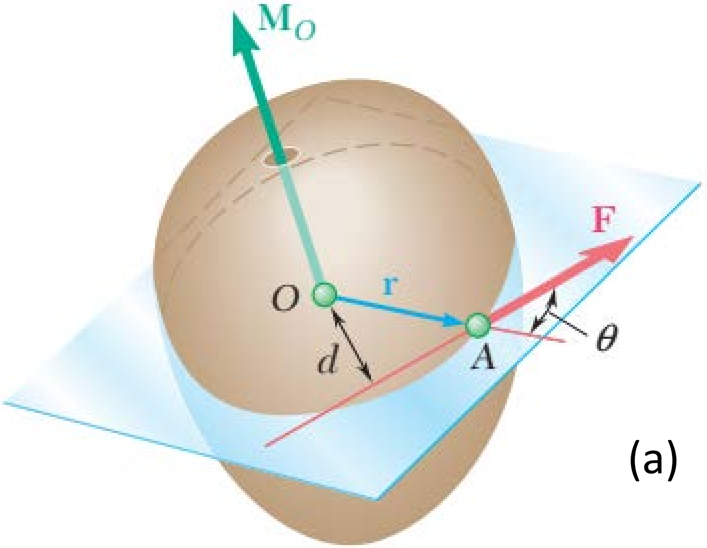
Bir noktaya uygulanan kuvvetin momenti

- Vektör çarpımının tanımına göre, $\mathbf{M_O}$ momenti O ve **F** kuvvetinin bulunduğu düzleme dik olmalıdır.
- $\mathbf{M_O}$ ’nin işareti dönme yönünün işaretine göre tanımlanır.
- Cisme üstten baktığımızda, F kuvveti O noktasına göre A noktasını saat tersi yönünde dönme zorluyorsa, $\mathbf{M}_O$ momenti yukarı yöndedir.
- Sağ el kuralına göre, parmakları F ‘den r’ye kapadığımızda, baş parmağın yönü $\mathbf{M}_O$ momentini yönünü gösterir. (Şekil b)

- O etrafında **F**’nin geliştirdiği momentin büyüklüğü

$$M_O = rF \sin\theta = Fd$$

- Θ **r** konum vektörü etki çizgisi ile **F** kuvveti arasındaki açıdır.
- d O’dan **F**’nin etki hattına dik olan mesafeyi gösterir. (Şekil a).
- d mesafesi çoğunlukla moment kolu uzunluğu olarak adlandırılır.



(a)

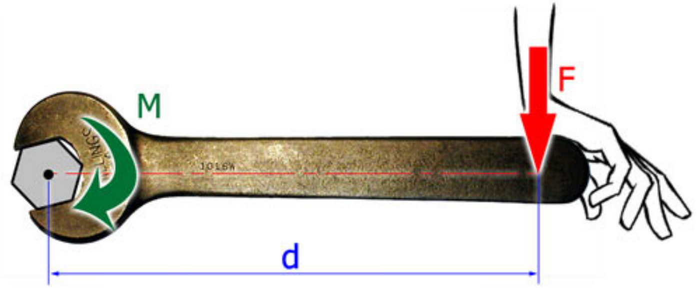
Parmaklar, **r**'den **F**'ye doğru kıvrılmaktadır.

Başparmak yönü $\mathbf{M}_O$ ‘nin yönünü gösterir.

(b)

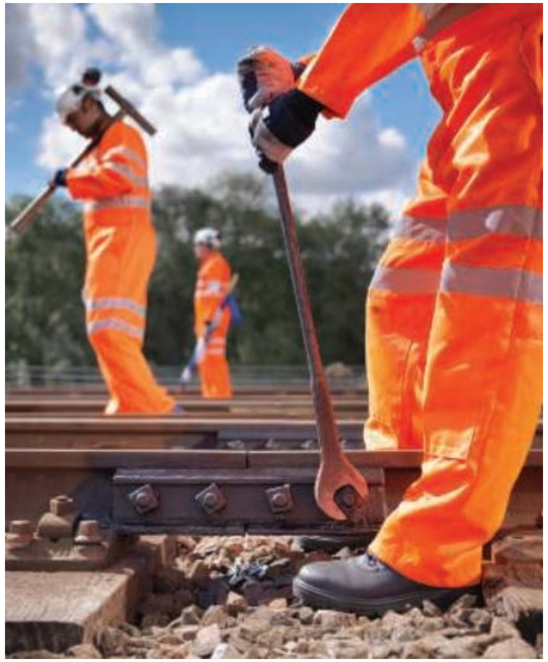
Bir noktaya uygulanan kuvvetin momenti

Rüzgar türbininin elektriksel güç üretmesi, kanatlarının dönmesi için rüzgar kuvveti gereklidir.
Dönme noktası ve kuvvetin etkime noktası arasındaki dikey mesafe (genellikle moment kolu olarak anılır) önemlidir.



Küçük bir moment için kısa moment kolu olan küçük İngiliz anahtarı kullanırız.

Daha büyük bir momente ihtiyacınız varsa, uzun bir moment kolu olan büyük bir İngiliz anahtarı kullanabilirsiniz.



Momentin büyüklüğü sabit bir eksen etrafında rijit cismi döndürmek için uygulanan kuvvetin döndürme eğiliminin ölçüsüdür.

Kuvvetin newton (N) ve mesafenin metre (m) olarak ifade edildiği SI birim sisteminde, bir kuvvetin momenti Newton-metre (N. m) olarak tanımlanır.

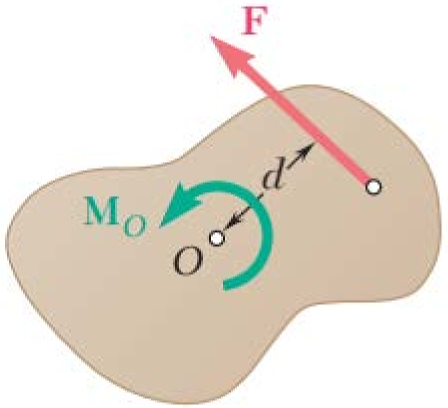
Kuvvetin pound, mesafenin feet veya inç olarak ifade edildiği ABD birleşik birim sisteminde, bir kuvvetin momneti lb,ft veya lb. in olarak tanımlanır.

Bir noktaya uygulanan kuvvetin momenti

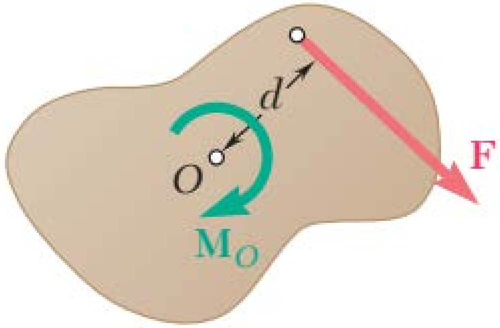
İki boyutlu problemler

Statikte bir çok uygulama iki boyutlu yapıların analizini kapsar. Böyle yapılar temel olarak uzunluk ve genişlik ile ifade edilmesine karşın yok varsayılabilir bir derinliğe sahiptir. Çoğunlukla, yapının düzlemi içinde bulunan kuvvetlerle ilgilenilir. Bunların analizi üç boyutlu yapılara göre daha kolaydır.

Örneğin, şekildeki gibi levha düzleminde bulunan F bir kuvvetinin rijit bir levhaya etkidiğini düşünelim. O noktası çevresindeki **F** kuvvetinin momenti düzleme dik ve büyüklüğü *F.d* olan $\mathbf{M}_O$ vektörüyle gösterilir. Şekil (a) da **F** kuvveti levhayı saat ters yönünde, Şekil (b) de **F** kuvveti levhayı saat dönüş yönünde döndürme eğilimindedir. Saat ters yönündeki moment pozitif, saat dönüş yönündeki moment negatiftir.



(a) $\mathbf{M}_O = + Fd$



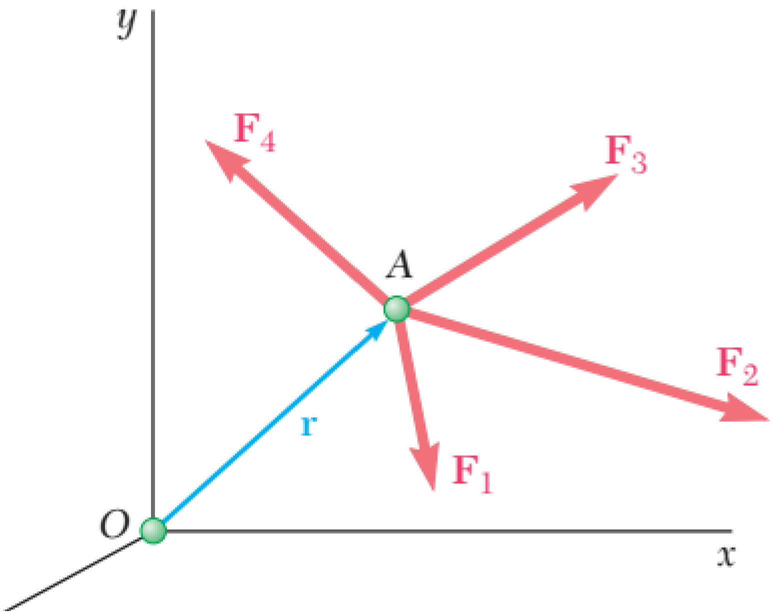
(b) $\mathbf{M}_O = - Fd$

Bir kuvvetin momentinin dik bileşenleri

Birkaç eşzamanlı kuvvetin bileşkesinin verilen bir O noktası etrafındaki momenti aynı O noktası etrafındaki çeşitli kuvvetlerin momentlerinin toplamına eşittir.

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \cdots$$

Bu özellik Varignon teoremi olarak bilinir. (Şekil a)



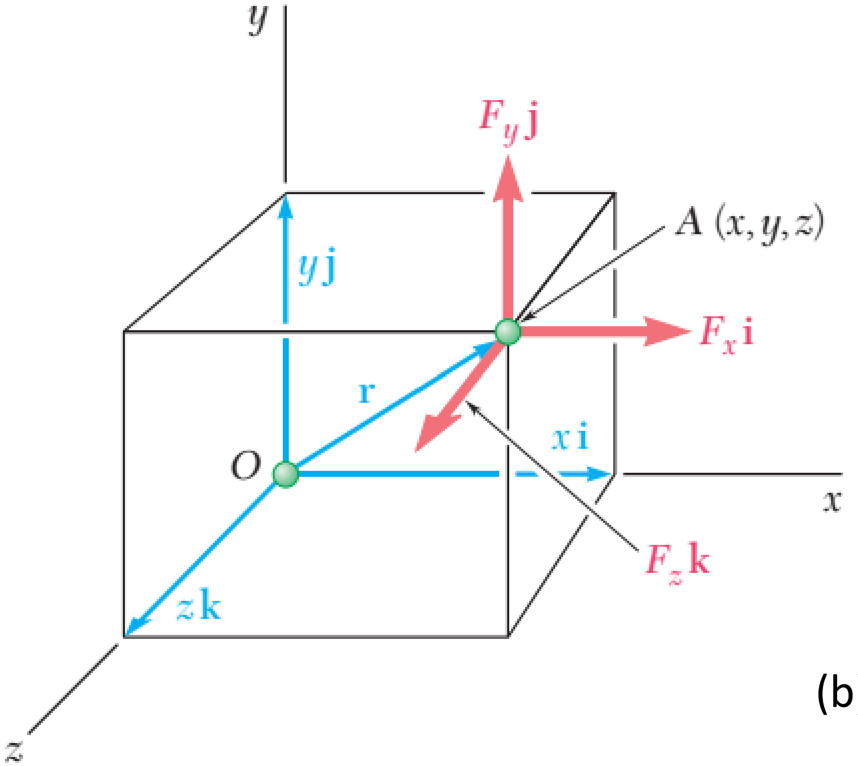
(a)

Genel olarak, momentin uygulandığı bir noktanın kuvveti ve konum vektörü dik x, y ve z bileşenleri olarak çözümlenirse, uzayda bir kuvvetin momentinin belirlenmesi oldukça basitleştirilir. Örneğin, bir A noktasına uygulanan bileşenleri F_x F_y, ve F_z ve koordinatları x, y ve z olan bir **F** kuvvetinin O çevresinde geliştirdiği bir $\mathbf{M}_O$ momenti düşünelim. (Şekil b). Konum vektörü **r** ve kuvvet vektörü **F** aşağıdaki gibi yazılır:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}$$



(b)

Bir kuvvetin momentinin dik bileşenleri

Bir momentin dik bileşenleri:

$$M_x = yF_z - zF_y$$
$$M_y = zF_x - xF_z$$
$$M_z = xF_y - yF_x$$

M_O momentinin determinant gösterimi:

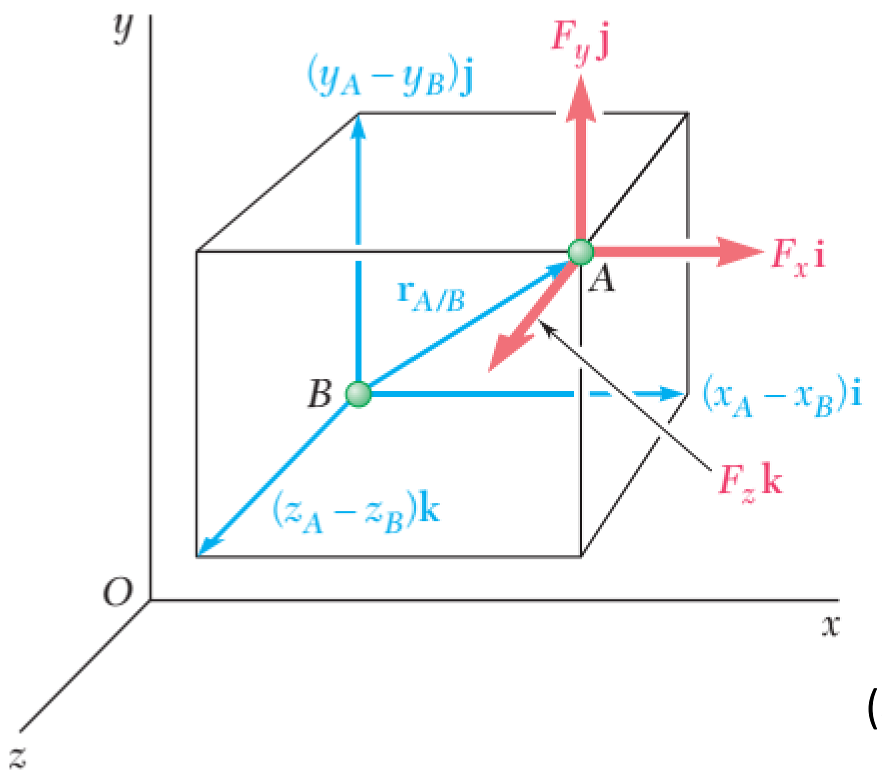
$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

A noktasına uygulanan **F** kuvvetinin keyfi bir B noktası etrafındaki moment **M_B** ni hesaplamak için, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ denklemindeki **r** konum vektörünü B'den A'ya çizilen bir vektörle yer değiştiriyoruz. Şekil (a):

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$$



(a)