TEMEL MEKANİK
8

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Dayıoğlu
Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi
Tarım Makinaları ve Teknolojileri Mühendisliği Bölümü

Ders Kitapları:

- Mühendisler İçin Vektör Mekaniği, Statik, Yazarlar: Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston, Elliot R. Eisenberg, 2008, Güven Yayınları, İzmir

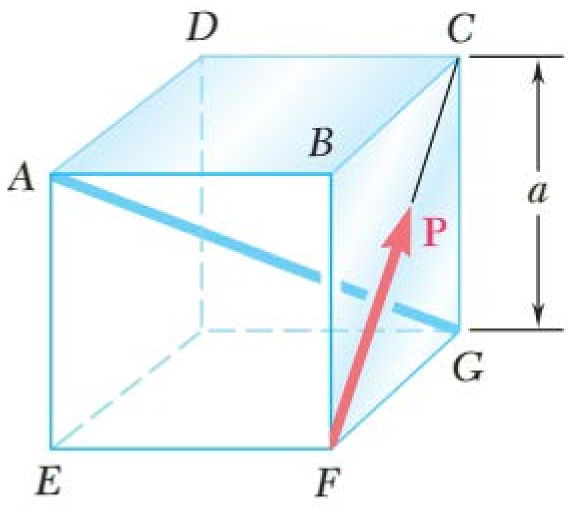
  Çevirenler: Ömer Gündoğdu, Halil Rıdvan Öz, Osman Kopmaz.
- Mühendisler İçin Vektör Mekaniği, Statik, Yazarlar: Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Johnston Jr, David F. Mazurek, 2015, Literatür Yayıncılık, İstanbul,

  Çevirenler: Ömer Gündoğdu, Osman Kopmaz.

Diğer Kaynaklar:

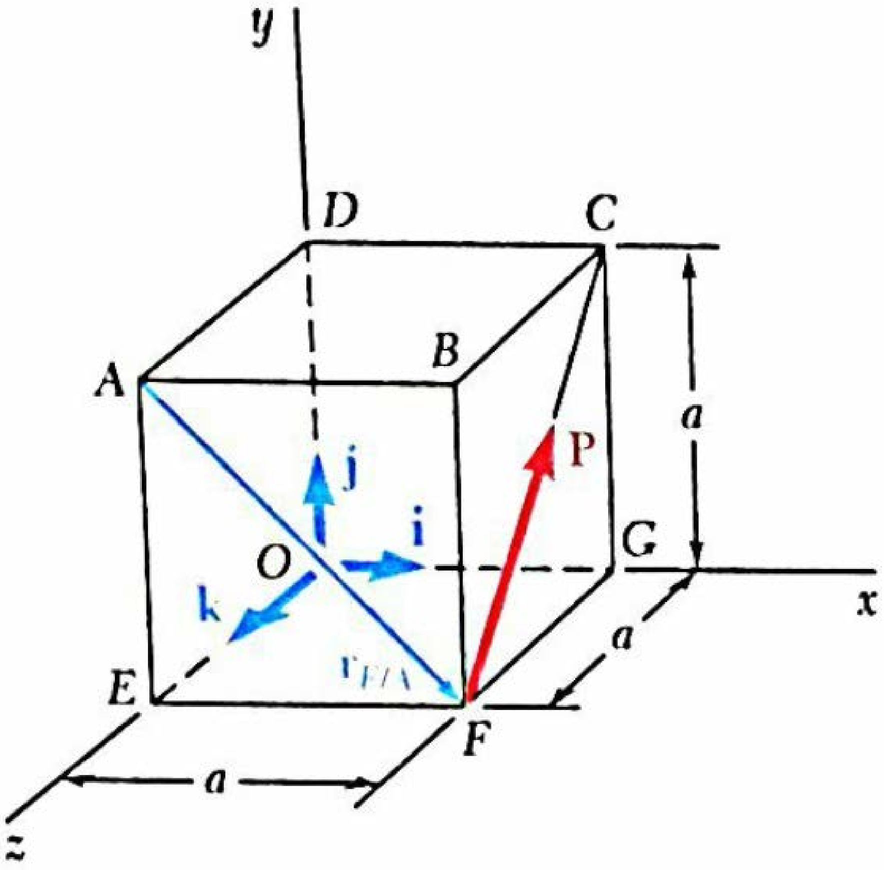
- Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Johnston Jr, David F. Mazurek, 2015. Vector Mechanics for Engineers 11e : Statics : SI Units, McGraw Hill, USA.
- Russell C. Hibbeler, 2016. Engineering Mechanics: Statics in SI Units (14e), Pearson Higher Ed USA.

Örnek problem 3.5:



Kenar uzunluğu a olan bir küpe **P** kuvveti gösterildiği gibi etki etmektedir. (a) A'ya göre, (b) AB kenarına göre, (c) küpün AG köşegenine göre **P**'nin momentini bulunuz. (d) c şıkkındaki sonucu kullanarak AG ile FC arasındaki dik uzaklığı bulunuz.

Örnek çözüm 3.5:



a. A'ya göre moment. x, y ve z koordinatlarını görüldüğü gibi seçerek, $\mathbf{P}$ kuvvetini ve A'dan $\mathbf{P}$'nin uygulanma noktası olan F'ye çizilen $\mathbf{r}_{F/A} = \overrightarrow{AF}$ vektörünü dik bileşenlerine ayırırız.

$$\mathbf{r}_{F/A} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$
$$\mathbf{P} = (P/\sqrt{2})\mathbf{j} - (P/\sqrt{2})\mathbf{k} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$\mathbf{P}$'nin A'ya göre momenti

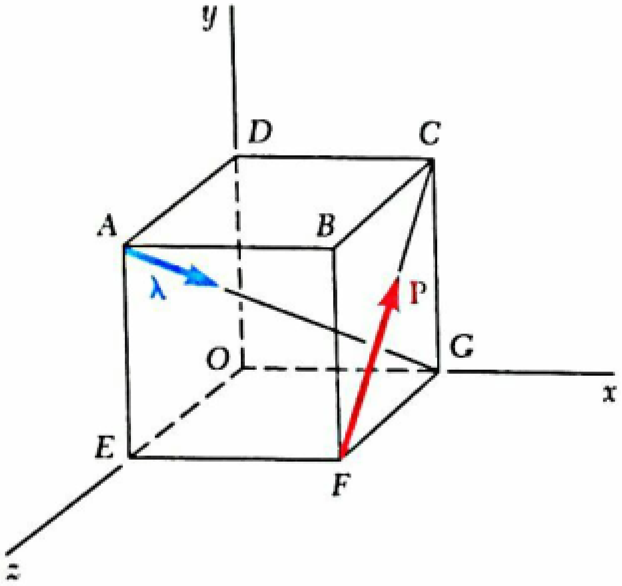
$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{F/A} \times \mathbf{P} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$
$$\mathbf{M}_A = (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \blacktriangleleft$$

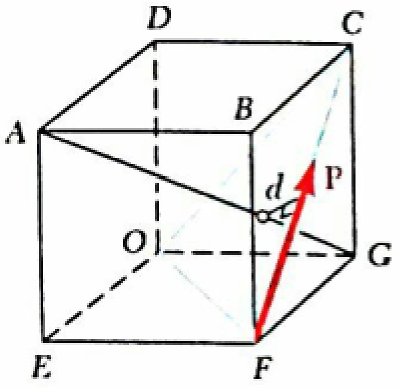
b. AB'ye göre moment. $\mathbf{M}_A$'nın AB'ye izdüşümünü alırız.

$$M_{AB} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{i} \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$
$$M_{AB} = aP/\sqrt{2} \blacktriangleleft$$

AB x eksenine paralel olduğu için M_{AB}'nin de $\mathbf{M}_A$ momentinin x bileşeni olduğunu doğrularız.

Örnek çözüm 3.5:





c. AG köşegenine göre moment. **P**'nin *AG*'ye göre momenti $\mathbf{M}_A$'nın *AG*'ye izdüşümünü alarak elde edilir. *AG* boyunca yer alan birim vektörü $\boldsymbol{\lambda}$ ile gösterirsek

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AG}}{AG} = \frac{a\mathbf{i} - a\mathbf{j} - a\mathbf{k}}{a\sqrt{3}} = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$M_{AC} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_A = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AG} = (aP/\sqrt{6})(1 - 1 - 1) \qquad M_{AG} = -aP/\sqrt{6}$$

elde ederiz.

İkinci yol. **P**'nin *AG*'ye göre momenti determinant halinde de ifade edilebilir:

$$M_{AG} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{F/A} & y_{F/A} & z_{F/A} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ a & -a & 0 \\ 0 & P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{vmatrix} = -aP/\sqrt{6}$$

d. AG ile FC arasındaki dik uzaklık. Öncelikle **P**'nin *AG* köşegenine dik olduğunu gözlemleriz. Bu ise $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}$ sayısal çarpımını yazıp sıfır olduğunu doğrulayarak denetlenebilir:

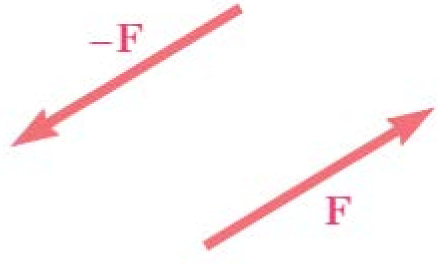
$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = (P\sqrt{6})(0 - 1 + 1) = 0$$

M_{AG} momenti $-Pd$ ile gösterilebilir. Burada d, *AG*'den *FC*'ye olan dik uzaklıktır. (*G*'deki gözlemciye göre **P**'nin küpe başlattığı dönme eğilimi saat yönünde ortaya çıktığı için negatif işaret kullanılmıştır.) *c*'de M_{AG} için bulunan değeri hatırladığımızda,

$$M_{AG} = -Pd = -aP/\sqrt{6} \qquad d = a/\sqrt{6}$$

3.3 Kuvvet çiftleri ve kuvvet çifti sistemleri

Rijit cisimler üzerinde kuvvet ve momentlerin etkilerini araştırıyoruz.
Kuvvetlerden ve momentlerden oluşan bir sistemi daha basit eşdeğer bir sisteme dönüştürebiliriz.

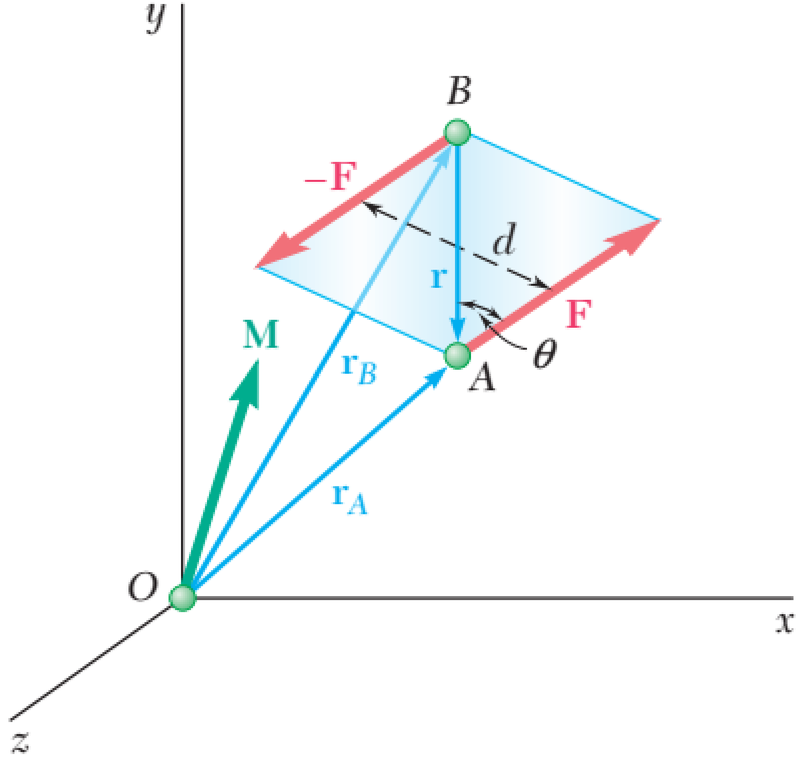


(a)

Bir kuvvet çiftinin momenti

Aynı büyüklükte, birbirine paralel, ancak ters önlü iki kuvvetin, **F** ve – **F**, kuvvet çifti oluşturduğunu söyleyebiliri: (Şekil a).
Şekil (b) de gösterilen A ve B noktalarına $\mathbf{r}_A$ ve $\mathbf{r}_B$ konum vektörleri esas alınarak sırasıyla F ve –F iki kuvvetin uygulandığını düşünelim. O çevresindeki iki kuvvetin momentlerinin toplamı aşağıda yazılmıştır:

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$



(b)

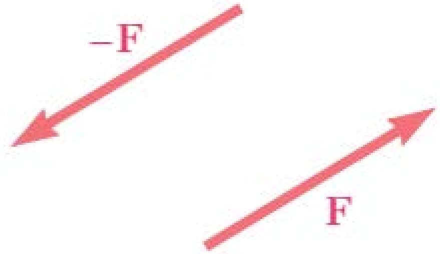
3.3 Kuvvet çiftleri ve kuvvet çifti sistemleri

Bir kuvvet çiftinin momenti

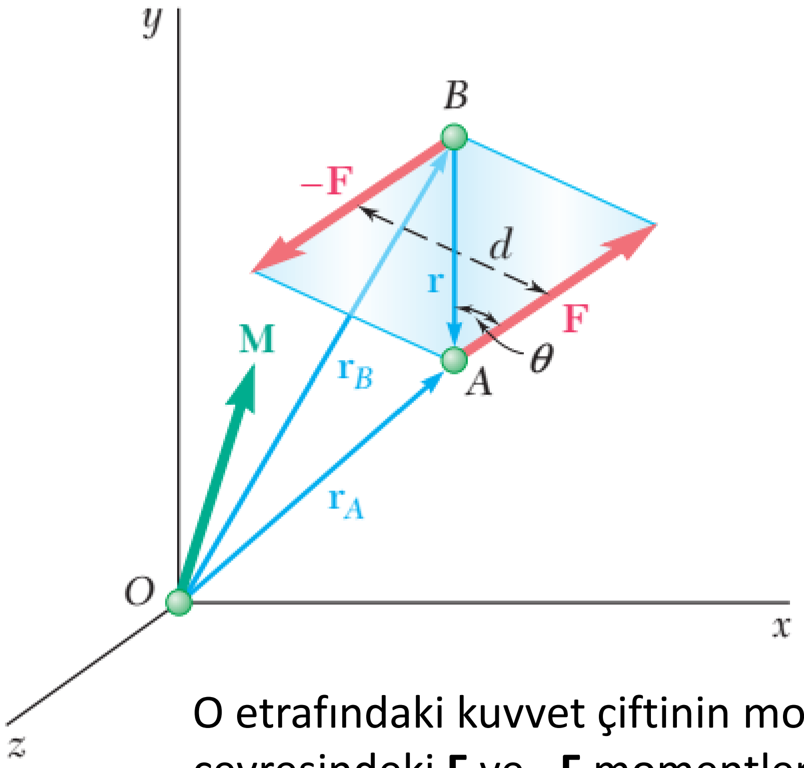
$\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$ olarak düzenlenirse, $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

M vektörü kuvvet çiftinin momenti olarak adlandırılır.
Moment iki kuvvetin bulunduğu düzleme diktir.
Büyüklüğü $M = rF \sin\theta = Fd$ ile hesaplanır.

d F ve –F ‘nin etkidiği dik mesafedir.
Θ F (Yada –F) ve R arasındaki açıdır.
M’nin işareti sağ el kuralına göre belirlenir.



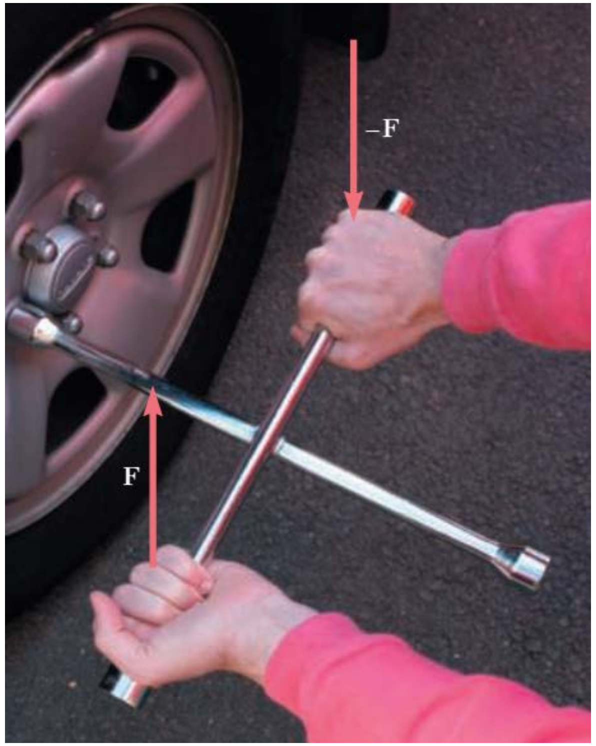
(a)



O etrafındaki kuvvet çiftinin momenti O çevresindeki **F** ve –**F** momentlerinin toplamına eşittir.

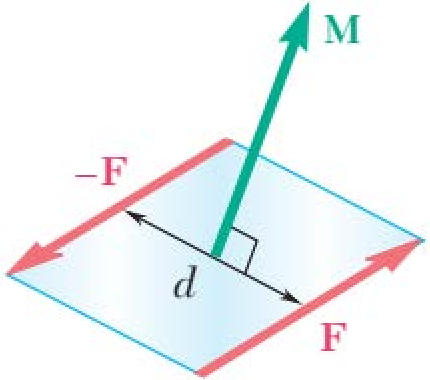
(b)

3.3 Kuvvet çiftleri ve kuvvet çifti sistemleri

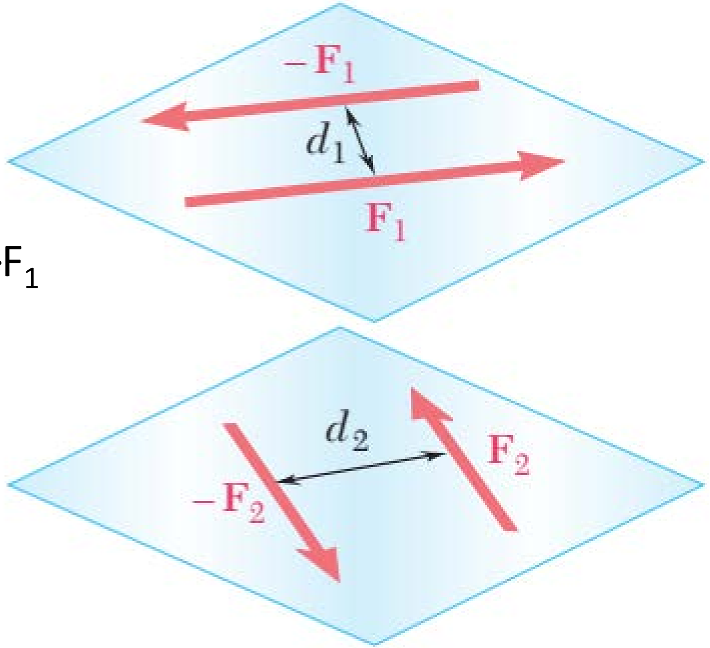


Bir kuvvet çiftinin momenti

Bijon anahtarı kollarına uygulanan eşit büyüklükte ters yönlü iki kuvvet kuvvet çifti uygulamasına örnek olarak verilebilir.



Bir kuvvet çiftinin M momenti kuvvet çifti düzlemine dik olup; büyüklüğü, *F* ve *d* çarpımına eşittir. Kuvvet çifti düzlemin herhangi bir noktasına uygulanabilir.



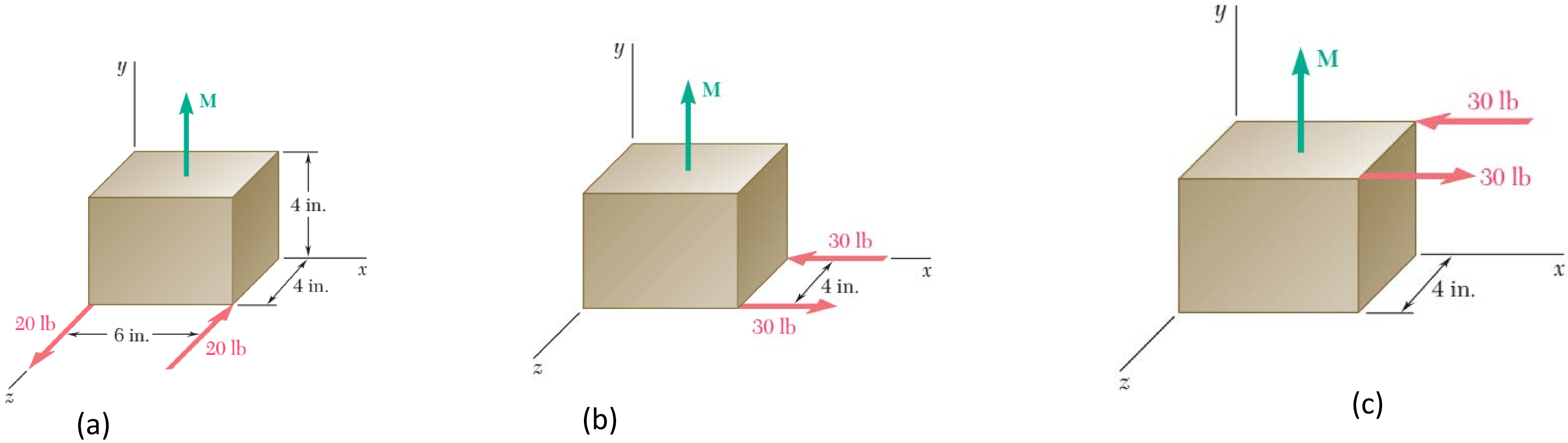
Şekilde gösterildiği gibi, kuvvet çifti momentinin tanımına göre, bir kuvvet çifti F_1 ve $–F_1$ ve diğeri F_2 ve $–F_2$ F olmak üzere

$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

ise, eşit momentlere sahiptir.

3.3 Kuvvet çiftleri ve kuvvet çifti sistemleri

Eşdeğer kuvvet çiftleri



Üç eşdeğer kuvvet çifti (Aynı yön, aynı büyüklük, M = 120 lb . in

(a) Üstten bakıldığında saat ters yönünde kutunun alt tarafından etkiyen kuvvet çifti
(b) Aynı düzlemde (a(dan daha büyük kuvvetlerin etkidiği aynı işaretli kuvvet çifti
(c) Aynı işarete sahip, ancak farklı düzlemde etkiyen kuvvet çifti

3.3 Kuvvet çiftleri ve kuvvet çifti sistemleri

Kuvvet çiftlerinin eklenmesi

Birbirini kesen P_1 ve P_2 düzlemleri ve bu düzlemlere etkiyen iki kuvvet çifti göz önüne alalım. (şekil a)

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$$

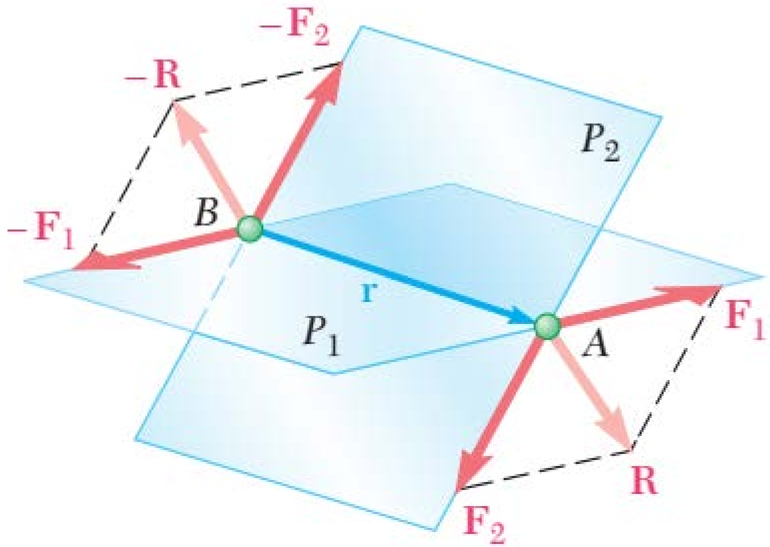
Varignon teoremine göre;

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

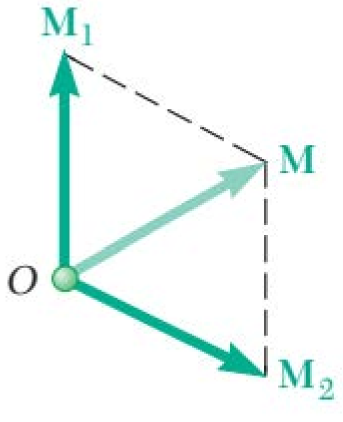
İlk terim P_1'de kuvvet çiftinin M_1 momentini,
ikinci terim P_2'de kuvvet çiftinin M_2 momentini gösterir:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$

$$\mathbf{M} = \Sigma\mathbf{M} = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



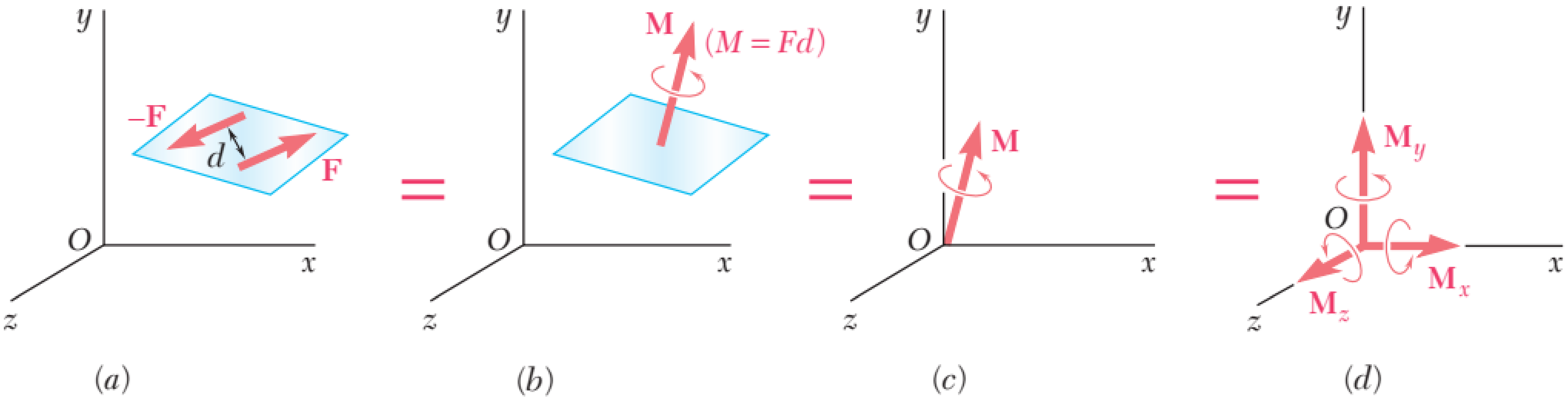
(a)



(b)

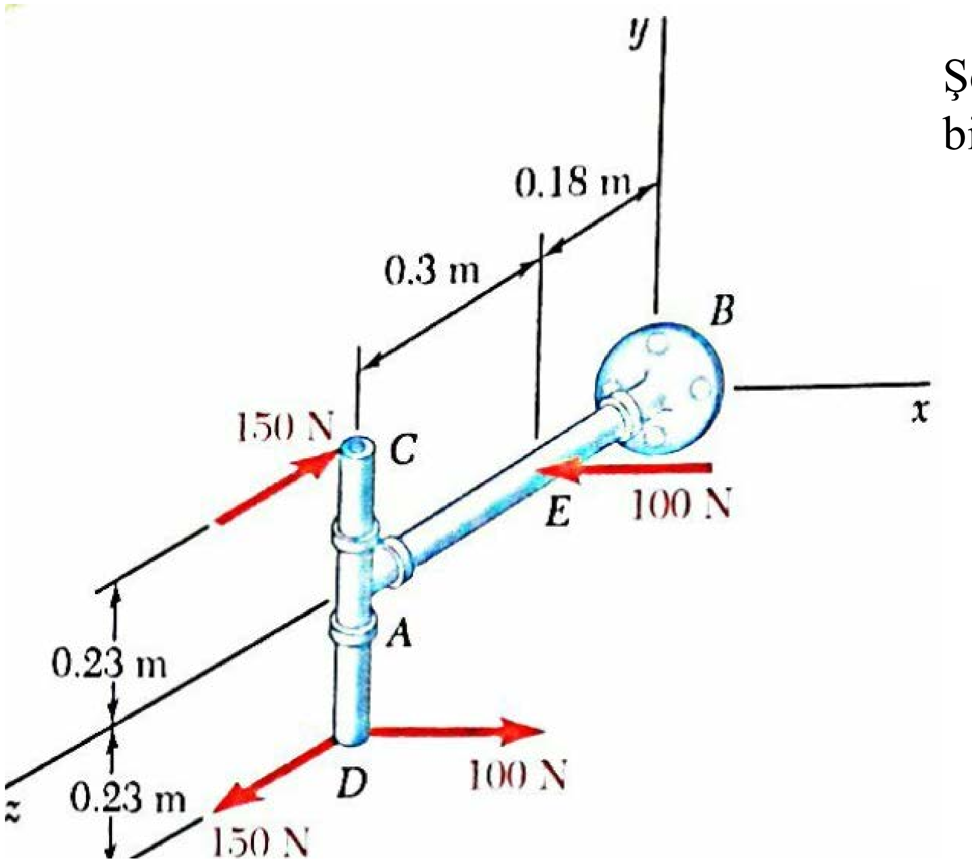
3.3 Kuvvet çiftleri ve kuvvet çifti sistemleri

Kuvvet çifti vektörleri



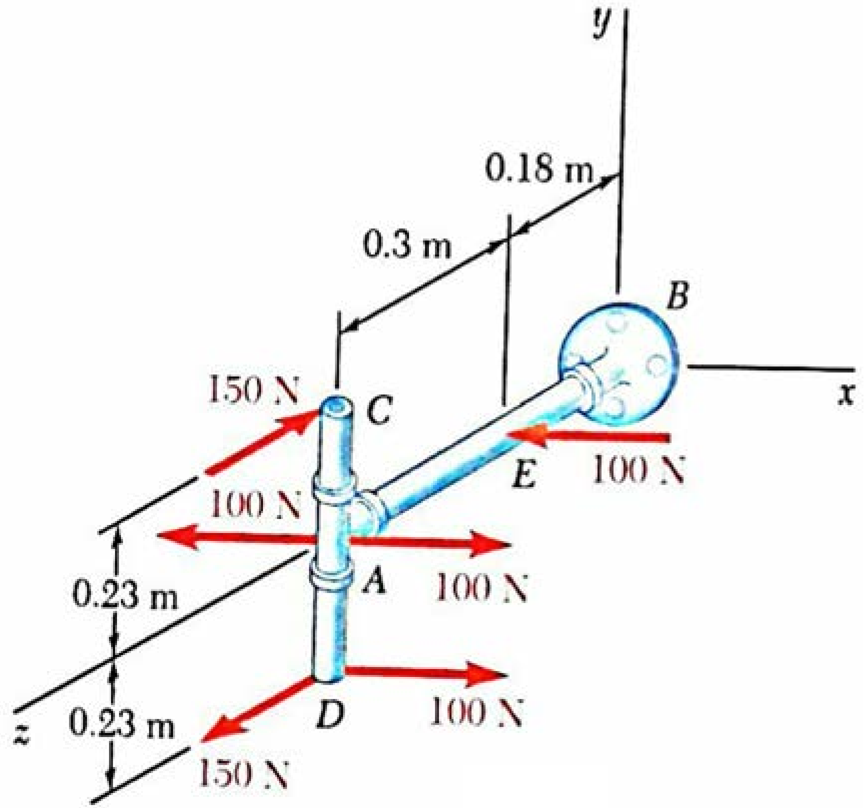
(a) İki kuvvetten oluşan kuvvet çifti,
(b) Kuvvet çiftinin bulunduğu düzleme dik konumlanmış kuvvet çifti vektörü,
(c) Kuvvet çifti vektörü serbest vektördür. Orjin gibi diğer uygulama noktasına taşınabilir.
(d) kuvvet çifti vektörü koordinat eksenleri boyunca bileşenler olarak çözümlenebilir.

Örnek problem 3.6:



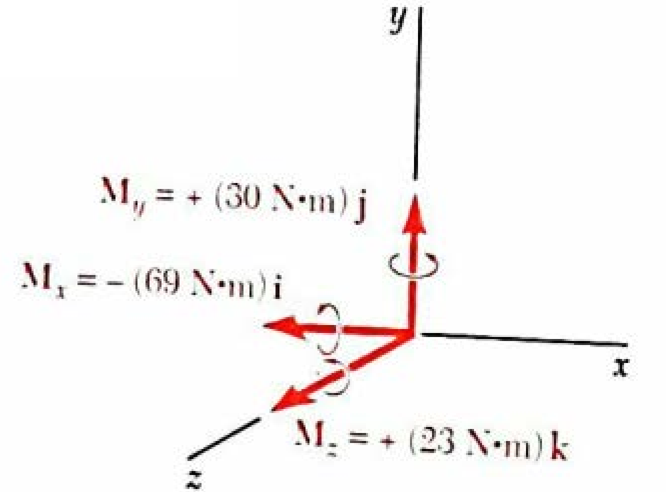
Şekilde verilen iki adet kuvvet çiftine denk tek kuvvet çiftinin bileşenlerini bulunuz.

Örnek çözüm 3.6:



A'ya, eşit ve zıt iki tane 100 N'luk kuvvet tuttururrsak hesaplamalar basitleşir. Bu bize orijinal 100 N'luk kuvvet çiftini yeni iki tane 100 N'luk kuvvet çiftiyle değiştirme imkânını verir, birisi zx düzleminde, diğeriyse xy düzlemine paralel bir düzlemde yer alır. Yandaki çizimde görülen üç adet kuvvet çifti, koordinat eksenleri boyunca yer alan $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$ ve $\mathbf{M}_z$ kuvvet çifti vektörleriyle temsil edilebilir. Momentlerin değerleri şöyledir:

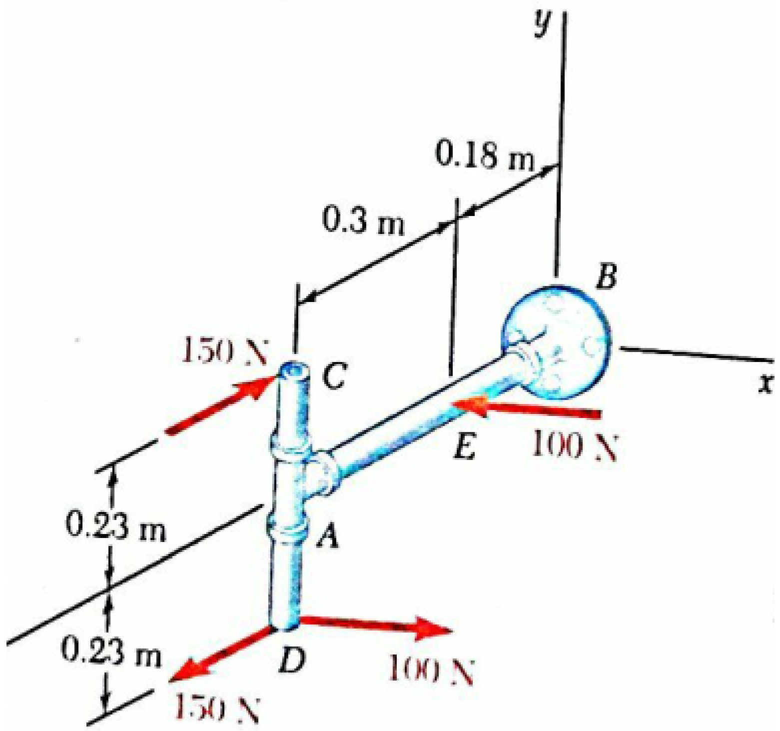
$$M_x = -(150 \text{ N})(0.46 \text{ m}) = -69 \text{ N} \cdot \text{m}$$
$$M_y = +(100 \text{ N})(0.3 \text{ m}) = +30 \text{ N} \cdot \text{m}$$
$$M_z = +(100 \text{ N})(0.23 \text{ m}) = +23 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Bu üç moment, verilen iki adet kuvvet çiftine denk tek kuvvet çifti M'nin bileşenlerini temsil eder.

$$\mathbf{M} = -(69 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (30 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (23 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

Örnek çözüm 3.6:



İkinci çözüm. Denk tek kuvvet çifti **M**'nin bileşenleri, verilen dört adet kuvvetin rastgele bir noktaya göre toplam momentini hesaplayarak da elde edilebilir. *D* noktasını seçersek

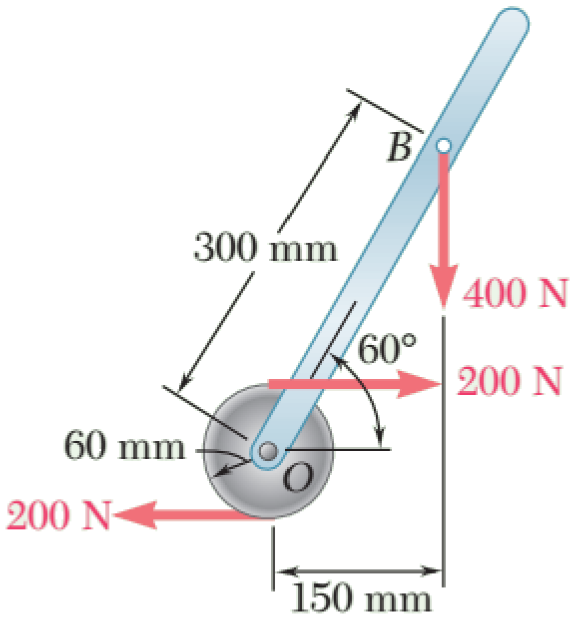
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_D = (0.46 \text{ m})\mathbf{j} \times (-150 \text{ N})\mathbf{k} + [(0.23 \text{ m})\mathbf{j} - (0.3 \text{ m})\mathbf{k}] \times (-100 \text{ N})\mathbf{i}$$

yazar ve vektör çarpımlarını hesaplarsak

$$\mathbf{M} = -(69 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (30 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (23 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

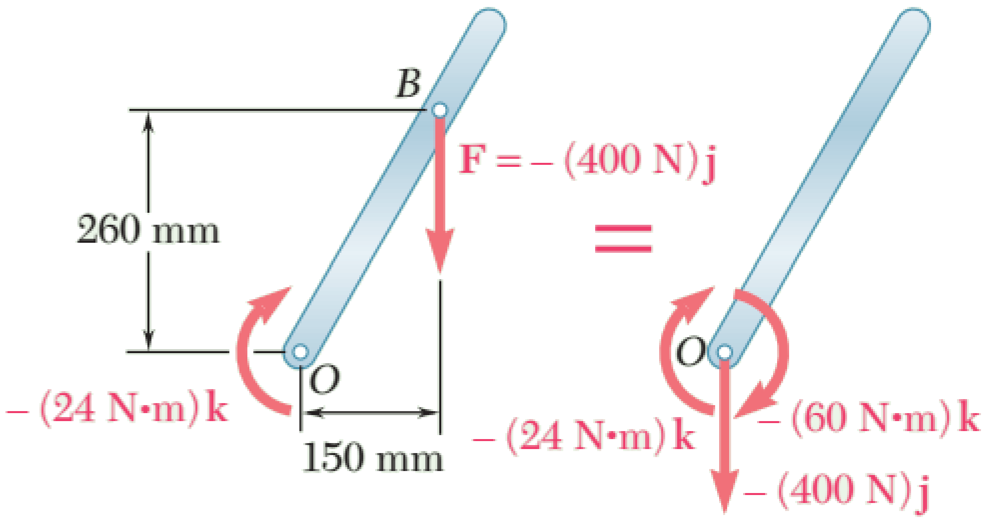
elde ederiz.

Örnek çözüm 3.7:



Gösterilen kuvvet çiftiyle kuvveti, kola uygulanan denk tek kuvvetle değiştiriniz. Bu kuvvetin uygulanma noktasının mile olan uzaklığını bulunuz.

Örnek çözüm 3.7:

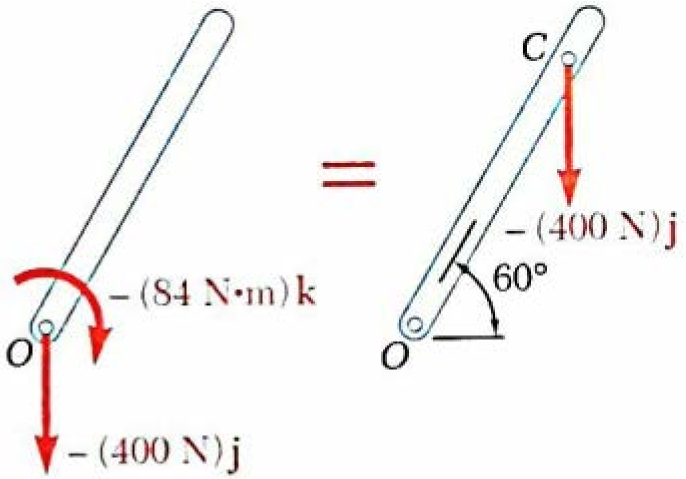


Öncelikle, verilen kuvvet ile kuvvet çifti, O'ya uygulanan denk kuvvet-kuvvet çifti sistemiyle değiştirilir. $\mathbf{F} = -(400\ \text{N})\mathbf{j}$ kuvvetini A'ya hareket ettiririz. Aynı zamanda orijinal konumdaki kuvvetin O'ya göre momentine eşit $\mathbf{M}_O$ kuvvet çifti momentini ekleriz.

) k

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OB} \times \mathbf{F} &= [(0.150\,\text{m})\mathbf{i} + (0.260\,\text{m})\mathbf{j}] \times (-400\,\text{N})\mathbf{j} \\ &= -(60\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Bu kuvvet çifti, iki adet 200 N'luk kuvvetin oluşturduğu $-(24\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$ kuvvet çifti momentine eklenir ve $-(84\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$ kuvvet çifti momenti elde edilir. Bu son kuvvet çifti, aşağıdaki sonucu verecek şekilde seçilen C noktasına $\mathbf{F}$'nin uygulanmasıyla yok edilebilir.

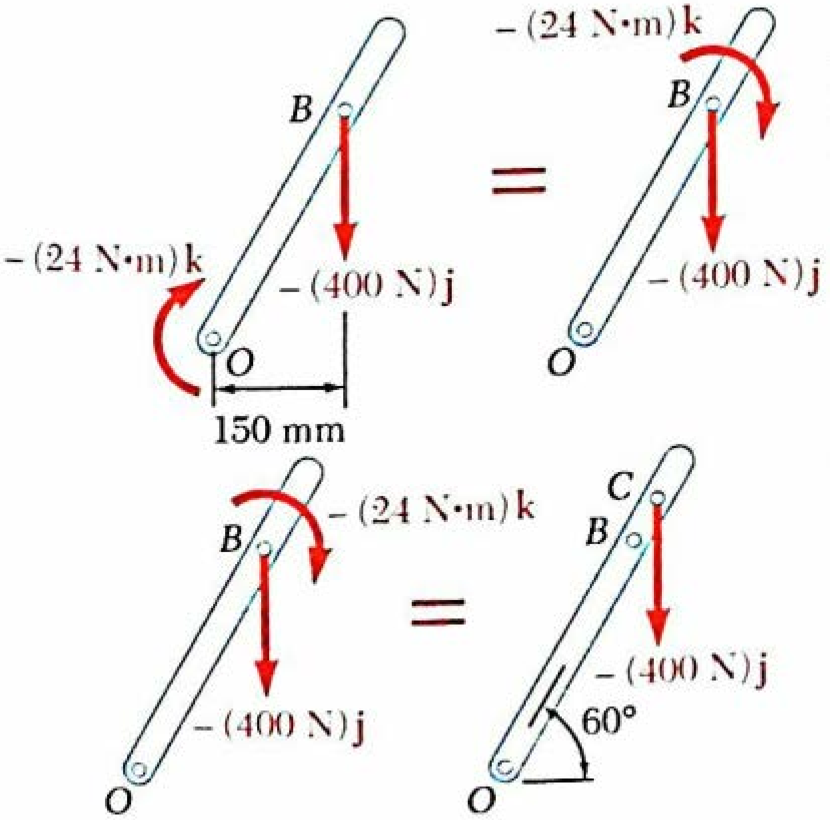


$$\begin{aligned}-(84\,\text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k} &= \overrightarrow{OC} \times \mathbf{F} \\ &= [(OC)\cos 60°\mathbf{i} + (OC)\sin 60°\mathbf{j}] \times (-400\,\text{N})\mathbf{j} \\ &= -(OC)\cos 60°(400\,\text{N})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Buradan şu sonuca varırız:

$$(OC)\cos 60° = 0.210\ \text{m} = 210\ \text{mm} \qquad OC = 420\ \text{mm}$$

Örnek çözüm 3.7:



İkinci çözüm. Kuvvet çiftinin etkisi konumuna bağlı olmadığı için $-(24\ \mathrm{N \cdot m})\mathbf{k}$ kuvvet çifti momenti B'ye hareket ettirilebilir; dolayısıyla B'de bir kuvvet-kuvvet çifti sistemi elde ederiz. $\mathbf{F}$'yi aşağıdaki gibi seçilen C noktasına uygulayarak kuvvet çifti yok edilebilir.

$$
\begin{aligned}
-(24\ \mathrm{N \cdot m})\mathbf{k} &= \overrightarrow{BC} \times \mathbf{F} \\
&= -(BC)\cos 60°(400\ \mathrm{N})\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

Buradan şu sonuca varırız:

$$(BC)\cos 60° = 0.060\ \mathrm{m} = 60\ \mathrm{mm} \qquad BC = 120\ \mathrm{mm}$$

$$OC = OB + BC = 300\ \mathrm{mm} + 120\ \mathrm{mm} \qquad OC = 420\ \mathrm{mm}$$

3.4 Kuvvetler sisteminin sadeleştirme

Kuvvetlerin – kuvvet çifti sistemine indirgenmesi

Rijit bir cisim üzerine A_1 , A_2 , A_3 …., noktalarında etkiyen, r_1 , r_2 , r_3 …., konum vertörleriyle tanımlanmış $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ …., kuvvetler sistemi göz önüne alalım.
$\mathbf{M}_1$ moment çifti O etrafında F_1 kuvvetinin r_1 x F_1 momentine eşittir.
Aynı işlemi $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ …., için yaparsak, kuvvetler eşzamanlı oldukları için onların **R** bileşkesi bulunabilir.
$\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ …., vektörleri vektörel olarak eklenebilir.
$\mathbf{M}_O^R$ tek kuvvet çifti vektörü tanımlanabilir.

Herhangi bir kuvvetler sistemini, karmaşık da olsa, belirli bir O noktasına etkiyen eşdeğer bir kuvvet çifti sistemine indirgeyebiliriz.

3.4 Kuvvetler sisteminin sadeleştirme

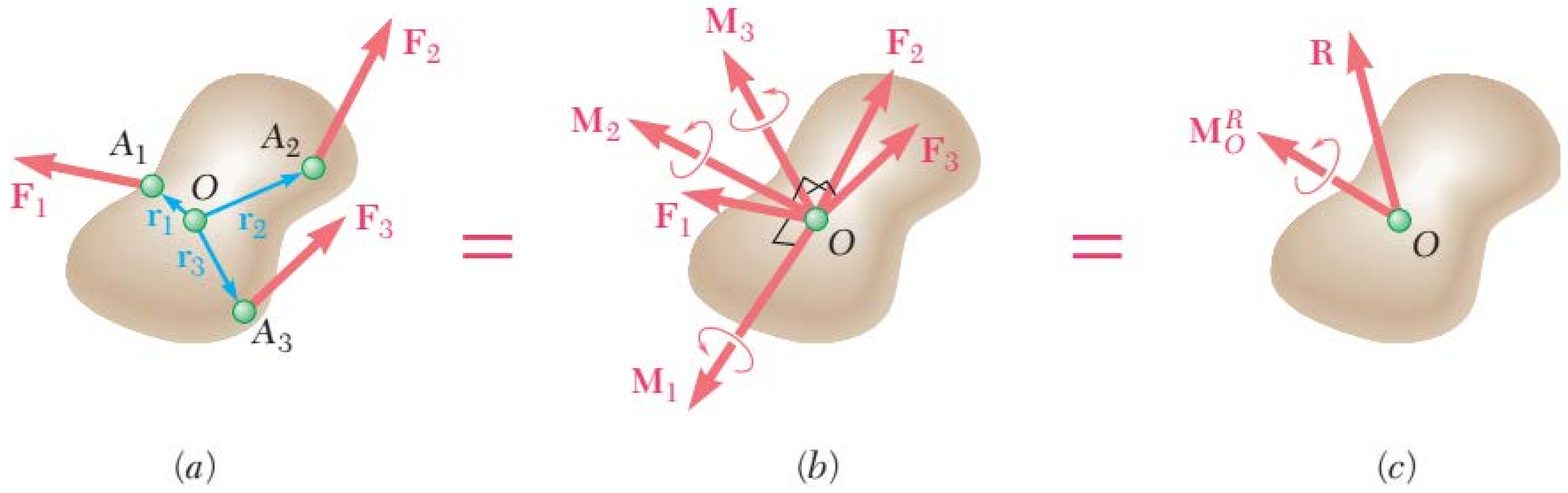
Kuvvetlerin – kuvvet çifti sistemine indirgenmesi

Kuvvetler sisteminin bir kuvvet çifti sistemine indirgenmesi

(a) İlk kuvvetler sistemi

(b) Eklenmiş kuvvet çiftleriyle O noktasına etkiyen taşınmış tüm kuvvetler,

(c) Tüm kuvvetlerin bileşke kuvvet vektörüne indirgenmesi ve tüm kuvvet çifti vektörlerinin bileşke kuvvet çifti vektörüne indirgenmesi



Kuvvet çifti sistemi $\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$ $\quad \mathbf{M}_O^R = \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$

$\mathbf{M}_O^R$ vektörüne sistemin bileşke momenti adı verilir.

3.4 Kuvvetler sisteminin sadeleştirme

Eşdeğer kuvvetler sistemi

İki kuvvetler sistemi belirli bir O noktasında aynı kuvvet-çifti sistemine indirgenebilirse, bu sistem eşdeğerdir.

Matematiksel olarak, eşdeğer olan iki kuvvetler sistemi için gerekli ve yeterli koşullar aşağıda yazılmıştır:

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \quad \text{ve} \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma \mathbf{M}'_O$$

Dik bileşenler

$$\Sigma F_x = \Sigma F'_x \qquad \Sigma F_y = \Sigma F'_y \qquad \Sigma F_z = \Sigma F'_z$$

$$\Sigma M_x = \Sigma M'_x \qquad \Sigma M_y = \Sigma M'_y \qquad \Sigma M_z = \Sigma M'_z$$

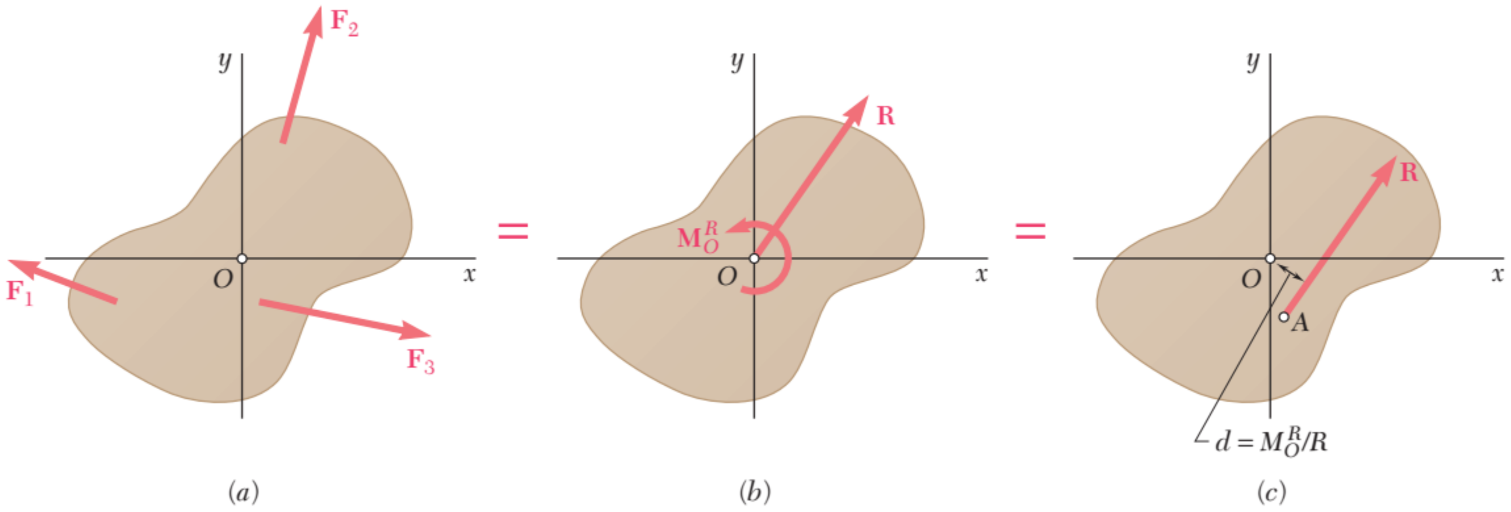
Rijit bir cisim üzerinde etki eden iki kuvvet sistemi eşit ise, bunlar da eşdeğerdir.

3.4 Kuvvetler sisteminin sadeleştirme

İlave indirgeme işlemleri

Tek bir kuvvete yada bileşkeye indirgenebilecek kuvvetler sistemleri **R** kuvvet vektörü ve $\mathbf{M}_R{}^O$ moment vektörünün birbirine dik olduğu sistemlerdir. Bu koşul ancak üç sistemde yeterlidir: **1) Kesişen kuvvetler , 2) Eşdüzlem kuvvetler, 3) Paralel kuvvetler.**

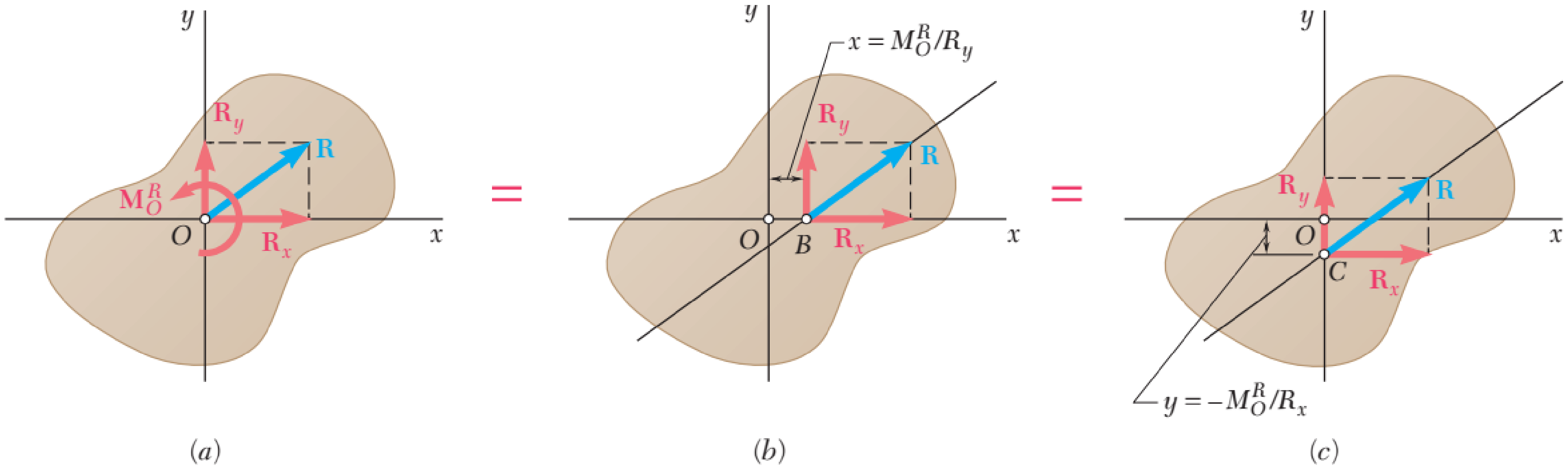
1. **Kesişen kuvvetler** aynı noktada etkir; bu nedenle **R** bileşke vektörünü elde etmek onları ekleyebiliriz. Bu vetörler daima tek bir kuvvete indirgenir.
2. **Eşdüzlem kuvvetler**, şekil (a) daki gibi aynı düzlemde etkir. Sistemde etkili olan **R** toplamı ilgili düzlem üzerinde bulunur. Bu karşın O etrafındaki her kuvvetin momenti ve $\mathbf{M}_O{}^R$ vektörü bu düzleme diktir. O daki kuvvet çifti sistemi, bu nedenle, birbirine dik olan R kuvveti ve $\mathbf{M}_O{}^R$ vektöründen oluşur. (Şekil (b)). O'dan R'nin etki hattına olan mesafesi d = $\mathbf{M}_O{}^R$/R olarak hesaplanır (şekil c).



3.4 Kuvvetler sisteminin sadeleştirme

O’daki kuvvet çifti sistemi aşağıdaki bileşenlerle karakterize edilebilir:

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad M_z^R = M_O^R = \Sigma M_O$$



3. Paralel kuvvetler paralel etki çizgisine ve farklı işaretlere sahip olabilirler. Kuvvetler y eksenine paraleldir. (şekil a). **R** toplam vektörü y eksenine de paraleldir.