

# TEMEL MEKANİK

## II



**Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Dayıođlu**

**Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi**

**Tarım Makinaları ve Teknolojileri Mühendisliđi Bölümü**

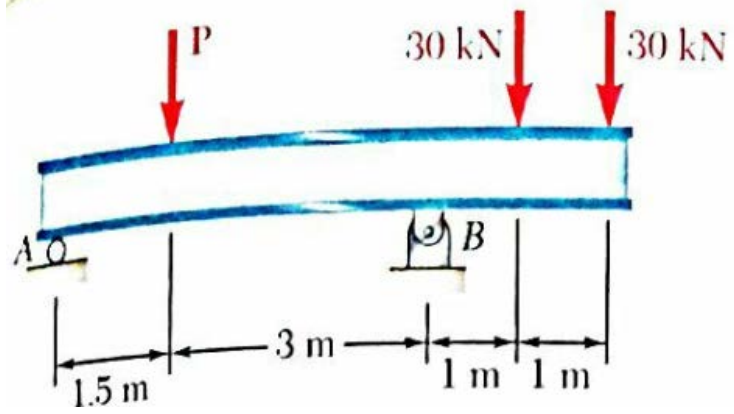
### **Ders Kitapları:**

- Mühendisler İçin Vektör Mekaniği, Statik, Yazarlar: Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston, Elliot R. Eisenberg, 2008, Güven Yayınları, İzmir  
Çevirenler: Ömer Gündoğdu, Halil Rıdvan Öz, Osman Kopmaz.
- Mühendisler İçin Vektör Mekaniği, Statik, Yazarlar: Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Johnston Jr, David F. Mazurek, 2015, Literatür Yayıncılık, İstanbul,  
Çevirenler: Ömer Gündoğdu, Osman Kopmaz.

### **Diğer Kaynaklar:**

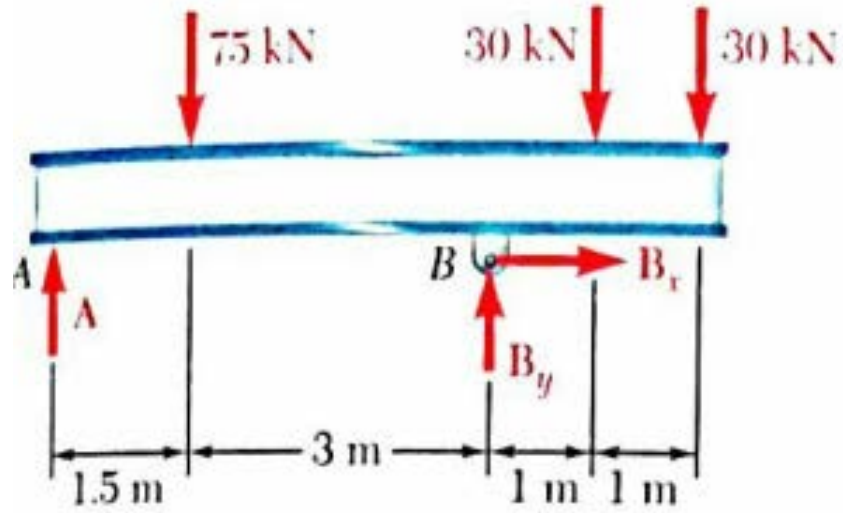
- Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Johnston Jr, David F. Mazurek, 2015. Vector Mechanics for Engineers 11e : Statics : SI Units, McGraw Hill, USA.
- Russell C. Hibbeler, 2016. Engineering Mechanics: Statics in SI Units (14e), Pearson Higher Ed USA.

## Örnek problem 4.2



Şekilde görülen kirişe üç adet yük uygulanmıştır. Kiriş  $A$ 'da makara ve  $B$ 'de pim ile mesnetlenmiştir. Kirişin ağırlığını ihmal ediniz.  $P = 75$  kN iken  $A$  ile  $B$ 'deki tepkileri bulunuz.

## Örnek çözüm 4.2



**Serbest Cisim Diyagramı.** Kirişin serbest cisim diyagramı çizilmiştir. A'daki tepki düşeydir ve A ile gösterilmiştir. B'deki tepki  $B_x$  ve  $B_y$  bileşenleriyle temsil edilmiştir. Her bir bileşenin görülen doğrultuda etki ettiği varsayılmıştır.

**Denge Denklemleri.** Aşağıdaki denge denklemlerini yazar ve belirtilen tepkileri bulmak için çözeriz:

$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad B_x = 0 \quad B_x = 0 \quad \leftarrow$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma M_A = 0: \\ -(75 \text{ kN})(1.5 \text{ m}) + B_y(4.5 \text{ m}) - (30 \text{ kN})(5.5 \text{ m}) - (30 \text{ kN})(6.5 \text{ m}) = 0 \\ B_y = +105 \text{ kN} \quad B_y = 105 \text{ kN} \uparrow \quad \leftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma M_B = 0: \\ -A(4.5 \text{ m}) + (75 \text{ kN})(3 \text{ m}) - (30 \text{ kN})(1 \text{ m}) - (30 \text{ kN})(2 \text{ m}) = 0 \\ A = +30 \text{ kN} \quad A = 30 \text{ kN} \uparrow \quad \leftarrow \end{aligned}$$

**Sağlama.** Bütün dış kuvvetlerin düşey bileşenleri toplanarak sonuçların sağlanması yapılır:

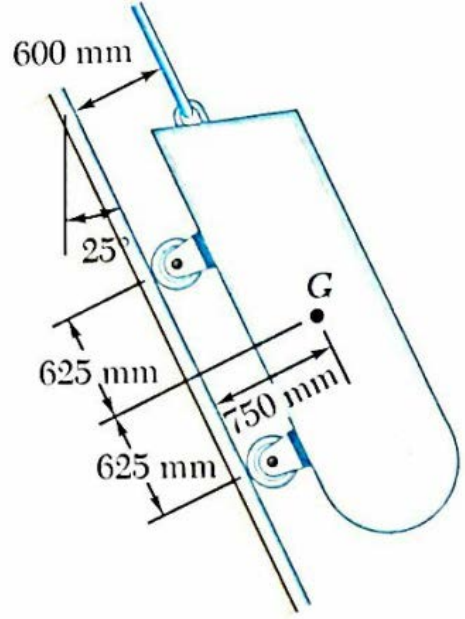
$$+ \uparrow \Sigma F_y = +30 \text{ kN} - 75 \text{ kN} + 105 \text{ kN} - 30 \text{ kN} - 30 \text{ kN} = 0$$

## Örnek çözüm 4.2

*Açıklama.* Bu problemde  $A$  ile  $B$ 'deki tepkilerin ikisi de düşeydir, ancak bu tepkiler farklı sebeplerden dolayı düşeydir. Kiriş,  $A$ 'da makarayla mesnetlenmiştir; bundan dolayı tepkinin yatay bileşeni olamaz.  $B$ 'de tepkinin yatay bileşeni sıfırdır çünkü  $\Sigma F_x = 0$  denge denklemini sağlamalıdır ve kirişe etki eden diğer kuvvetlerin hiçbirisinin yatay bileşeni yoktur.

İlk bakışta  $B$ 'deki tepkinin düşey olduğu dikkatimizi çekmişti ve  $B_x$  yatay bileşeni almaktan vazgeçmiştik. Ancak bu kötü bir uygulamadır. Bunu takip edersek yükleme şartlarının  $B_x$  bileşenini gerektirdiği yerde, bu bileşeni unutmaya tehlikesiyle karşılaşırız (yani yatay bir yük olursa). Ayrıca  $\Sigma F_x = 0$  denge denklemini kullanarak  $B_x$  bileşeni sıfır olarak bulunmuştu. İlk anda  $B_x$ 'i sıfır alırsak bu denklemi kullandığımızı göremeyebiliriz, dolayısıyla problemi çözmek için elimizde olan denklem sayısının izini kaybedebiliriz.

## Örnek problem 4.3



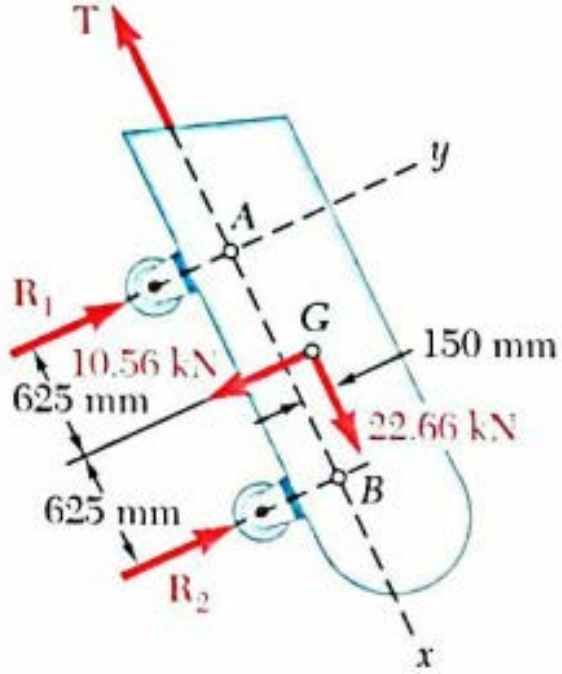
Düşeyle  $25^\circ$ 'lik açı yapan bir demir yolunda, bir yük arabası durmaktadır. Arabanın ve yükün brüt ağırlığı  $25\text{ kN}$ 'dur ve iki dingilin ortasında yoldan  $750\text{ mm}$  uzağa uygulanmıştır. Araba yoldan  $600\text{ mm}$  uzaktaki bir kabloyla tutulmuştur. Kablodaki çekme kuvvetini ve her bir tekerlek çiftindeki tepkiyi bulunuz.

## Örnek çözüm 4.3

**Serbest Cisim Diyagramı.** Arabanın serbest cisim diyagramı çizilmiştir. Her bir tekerlekteki tepki yola diktir, **T** çekme kuvvetiyse yola paraleldir. Uygun olsun diye,  $x$  eksenini yola paralel ve  $y$  eksenini yola dik seçeriz. Sonrasında 25 kN'luk ağırlığı  $x$  ve  $y$  bileşenlerine ayırırız.

$$W_x = +(25 \text{ kN}) \cos 25^\circ = +22.66 \text{ kN}$$

$$W_y = -(25 \text{ kN}) \sin 25^\circ = -10.56 \text{ kN}$$



**Denge Denklemleri.** Hesaplardan **T** ile **R<sub>1</sub>**'i yok etmek için momentleri **A**'ya göre alırız.

$$+\curvearrowright \Sigma M_A = 0: \quad -(10.56 \text{ kN})(0.625 \text{ m}) - (22.66 \text{ kN})(0.15 \text{ m}) \\ + R_2(1.25 \text{ m}) = 0 \\ R_2 = +8 \text{ kN} \quad \swarrow$$

Hesaplardan **T** ile **R<sub>2</sub>**'yi yok etmek için momentleri **B**'ye göre alırız.

$$+\curvearrowright \Sigma M_B = 0: \quad (10.56 \text{ kN})(0.625 \text{ m}) - (22.66 \text{ kN})(0.15 \text{ m}) \\ - R_1(1.25 \text{ m}) = 0 \\ R_1 = +2.56 \text{ kN} \quad \swarrow$$

**T**'nin değeri

$$\searrow + \Sigma F_x = 0: \quad +22.66 \text{ kN} - T = 0 \\ T = +22.66 \text{ kN} \quad \swarrow$$

yazarak bulunur. Hesaplanan tepki değerleri yandaki çizimde gösterilmiştir.

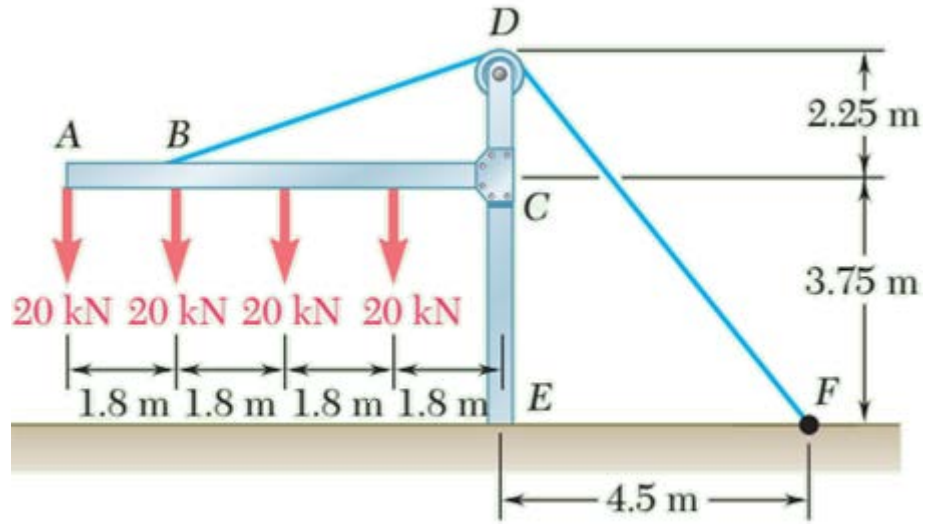
**Sağlama.** Aşağıdaki denklemi yazarak hesaplamalar doğrulanır.

$$\nearrow + \Sigma F_y = +2.56 \text{ kN} + 8 \text{ kN} - 10.56 = 0$$

**A** veya **B**'den başka herhangi bir noktaya göre momentleri hesaplayarak da bu çözümün sağlanması yapılabilir.

## Örnek problem 4.4

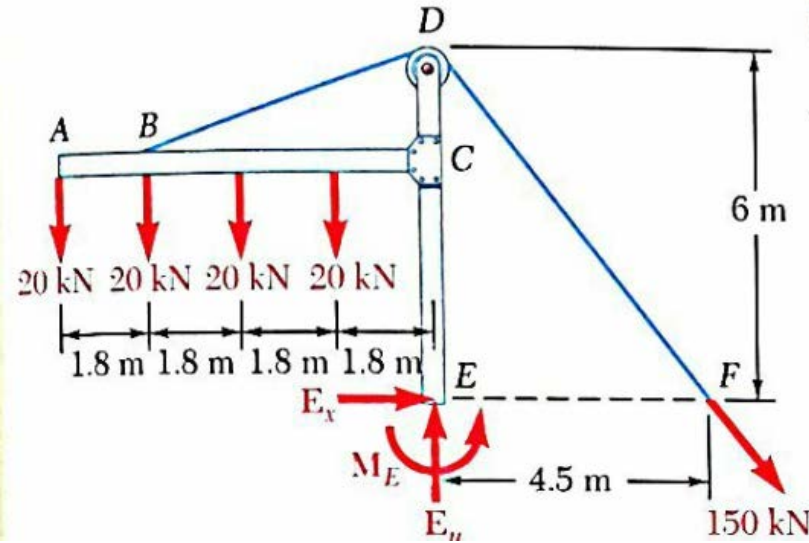
Şekilde görülen çerçeve küçük bir binanın çatısının bir kısmını desteklemektedir. Kablodaki çekme kuvvetinin  $150\text{ kN}$  olduğu bilindiğine göre  $E$  ucundaki tepkiyi bulunuz.





## Örnek çözüm 4.4

**Serbest Cisim Diyagramı.** Çerçevenin ve  $BDF$  kablosunun serbest cisim diyagramı çizilmiştir. Sabit uç  $E$ 'deki tepki  $E_x$  ile  $E_y$  bileşenleri ve  $M_E$  kuvvet çifti ile temsil edilmiştir. Serbest cisme etki eden diğer kuvvetler dört tane  $20$  kN'luk yük ile kablo ucu  $F$ 'ye uygulanan  $150$  kN'luk bir kuvvettir.



**Denge Denklemleri.**  $DF = \sqrt{(4.5 \text{ m})^2 + (6 \text{ m})^2} = 7.5 \text{ m}$ 'dir.

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0:$$

$$E_x + \frac{4.5}{7.5}(150 \text{ kN}) = 0$$

$$E_x = -90.0 \text{ kN}$$

$$E_x = 90.0 \text{ kN} \leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

$$E_y - 4(20 \text{ kN}) - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN}) = 0$$

$$E_y = +200 \text{ kN}$$

$$E_y = 200 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\curvearrowright \Sigma M_E = 0:$$

$$(20 \text{ kN})(7.2 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(5.4 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(3.6 \text{ m})$$

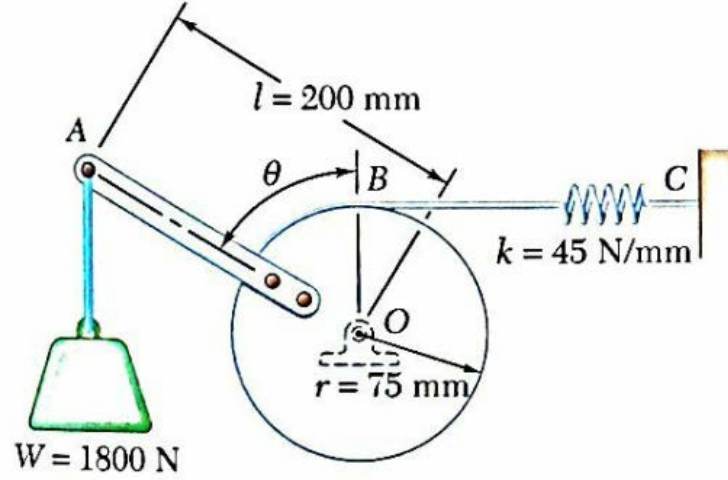
$$+ (20 \text{ kN})(1.8 \text{ m}) - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN})(4.5 \text{ m}) + M_E = 0$$

$$M_E = +180.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

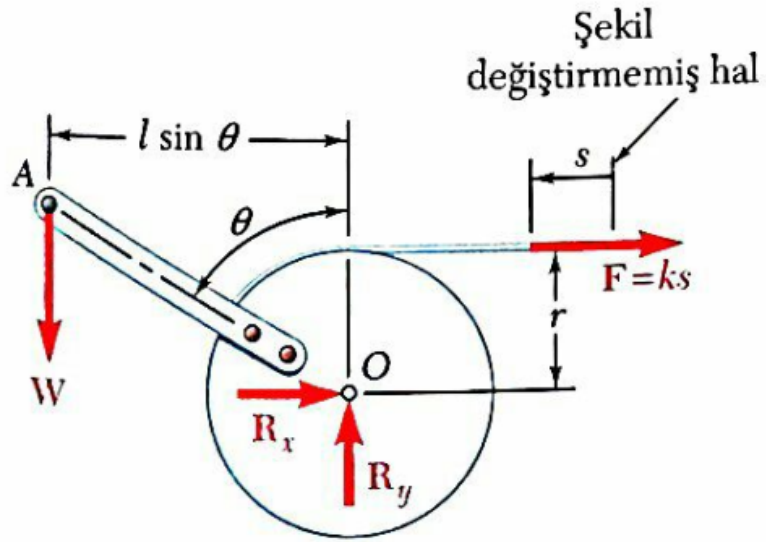
$$M_E = 180.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$$

## Örnek problem 4.5

Şekilde görülen kolun  $A$  noktasına  $1800\text{ N}$ 'luk ağırlık asılmıştır.  $BC$  yayının sabiti  $k = 45\text{ N/mm}$ 'dir ve  $\theta = 0$  iken yay uzamamış haldedir. Denge konumunu bulunuz.



## Örnek çözüm 4.5



**Serbest Cisim Diyagramı.** Kol ve silindirin serbest cisim diyagramını çizeriz. Yayın serbest uzunluğundan itibaren uzamasını  $s$  ile göster ve  $s = r\theta$  yazarsak  $F = ks = kr\theta$  elde ederiz.

**Denge Denklemleri.**  $W$  ile  $F$ 'nin  $O$ 'ya göre momentlerinin toplamını yazalım.

$$+\uparrow \Sigma M_O = 0: \quad Wl \sin \theta - r(kr\theta) = 0 \quad \sin \theta = \frac{kr^2}{Wl} \theta$$

Verilen değerleri yerleştirirsek

$$\sin \theta = \frac{(45 \text{ N/mm})(75 \text{ mm})^2}{(1800 \text{ N})(200 \text{ mm})} \theta \quad \sin \theta = 0.703 \theta$$

Deneme-yanılmayla çözersek  
buluruz.

$$\theta = 0 \quad \theta = 80.3^\circ \quad \blacktriangleleft$$

## 4.2 İki özel durum

Uygulamada dengenin basit durumları ya daha karmaşık analizin bir parçası olarak yada bütün modeller olarak çoğunlukla ortaya çıkmaktadır. Bu durumlara özgü karakteristikleri anlayarak, tüm analizi basitleştirebiliriz.

### İki kuvvetli cismin dengesi

Rijit cismin pratik uygulamalarında dengenin özel durumu iki kuvvetin konu olduğu problemleri kapsamaktadır. Böyle cisimlere iki kuvvetli cisim adı verilmektedir.

**İki kuvvetli cisim denge halindeyse, iki kuvvet aynı büyüklüğe, aynı etki çizgisine ve ters işarete sahip olmalıdır.**

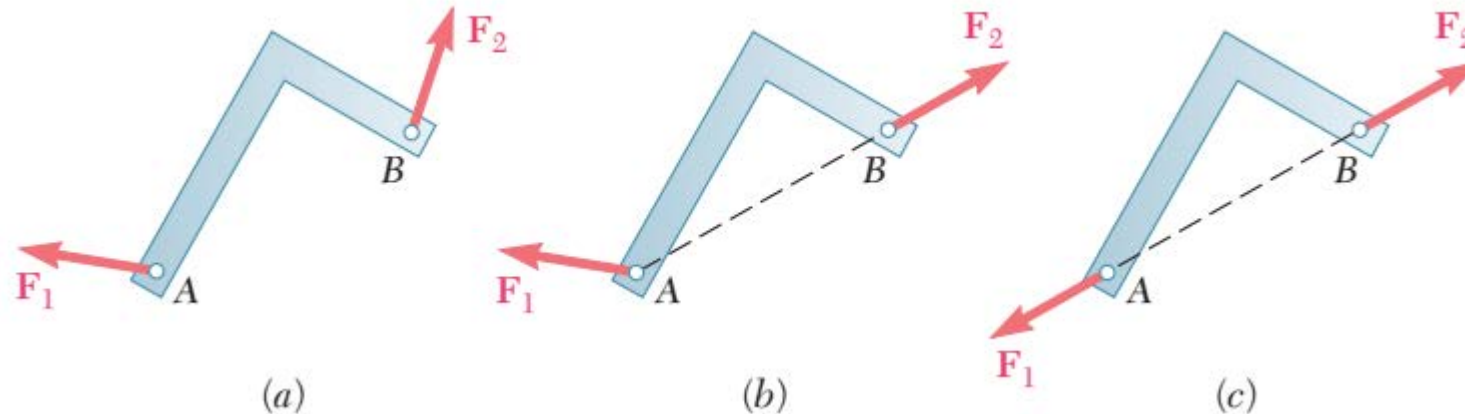
Sırasıyla A ve B'ye etki eden iki  $F_1$  ve  $F_2$  kuvvetlerine maruz kalan bir köşe plakası düşünelim (Şekil a). Plaka denge halinde ise, herhangi bir eksen etrafında  $F_1$  ve  $F_2$  kuvvetlerinin geliştirdiği momentlerin toplamı sıfır olmalıdır.

Önce, A çevresindeki momentleri toplarız.  $F_1$  kuvvetini momenti belirgin şekilde sıfır olduğundan,  $F_2$  kuvvetinin momenti de sıfır olmalı ve  $F_2$ 'nin etki çizgisi A'dan geçmelidir (Şekil b).

Benzer şekilde, B ile ilgili momentleri toplarsak,  $F_1$  kuvvetinin 'in etki çizgisinin B'den geçmesi gerektiğini gösterebiliriz (Şekil c).

Bu nedenle, her iki kuvvet aynı etki çizgisine (AB çizgisi) sahiptir.

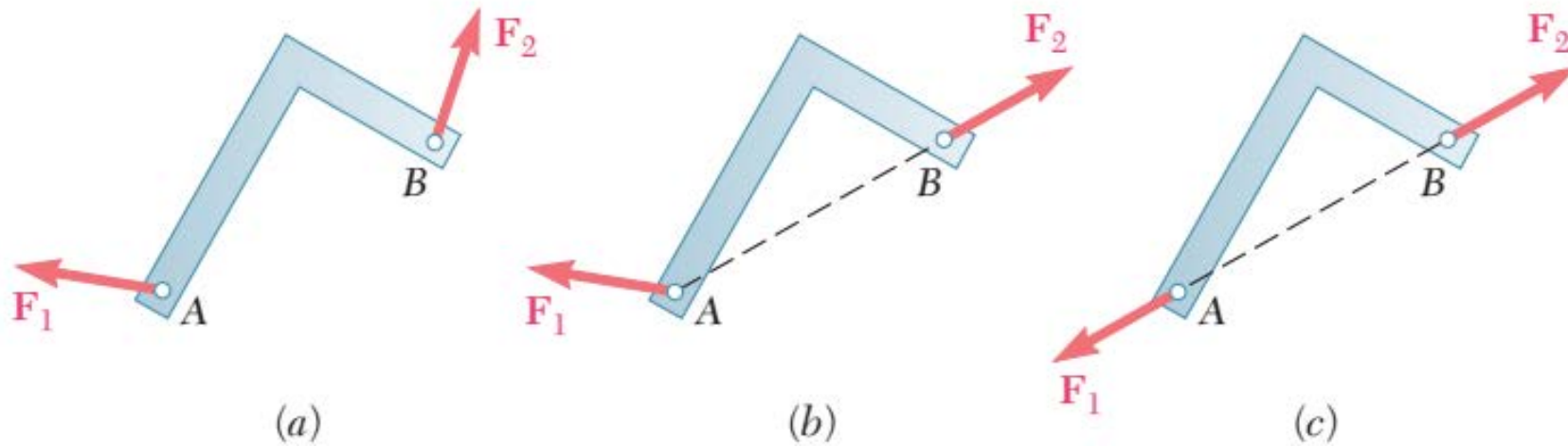
$\Sigma F_x = 0$  ve  $\Sigma F_y = 0$  denklemlerinden bunların aynı büyüklükte ancak ters işaretli olması gerektiğini görebilirsiniz.



## 4.2 İki özel durum

### İki kuvvetli cismin dengesi

A ve B noktalarına birkaç kuvvet etkiyorsa, A ya etkiyen kuvvetler  $F_1$  bileşkesiyle yer değiştirilebilir. B ye etkiyen kuvvetler  $F_2$  bileşkesiyle yer değiştirilebilir. Böylece, iki kuvvetli cisim daha genel olarak sadece iki noktaya etkiyen kuvvetleri ilgilendiren bir rijit cisim olarak tanımlanabilir.  $F_1$  ve  $F_2$  bileşkeleri aynı etki çizgisine, aynı büyüklüğe ve ters işaretlere sahip olmalıdır. (Şekil a, b, c)



## 4.2 İki özel durum

### Üç kuvvetli cismin dengesi

Rijit cismin pratik uygulamalarında dengenin diğer özel durumu üç kuvvetin yada üç noktaya etkiyen kuvvetlerin konu olduğu problemleri kapsamaktadır. Böyle cisimlere **üç kuvvetli cisim** adı verilmektedir.

A, B, ve C noktalarına etkiyen  $F_1$ ,  $F_2$  ve  $F_3$  üç kuvvete indirgenmiş bir sistemi göz önüne alalım. (Şekil a).

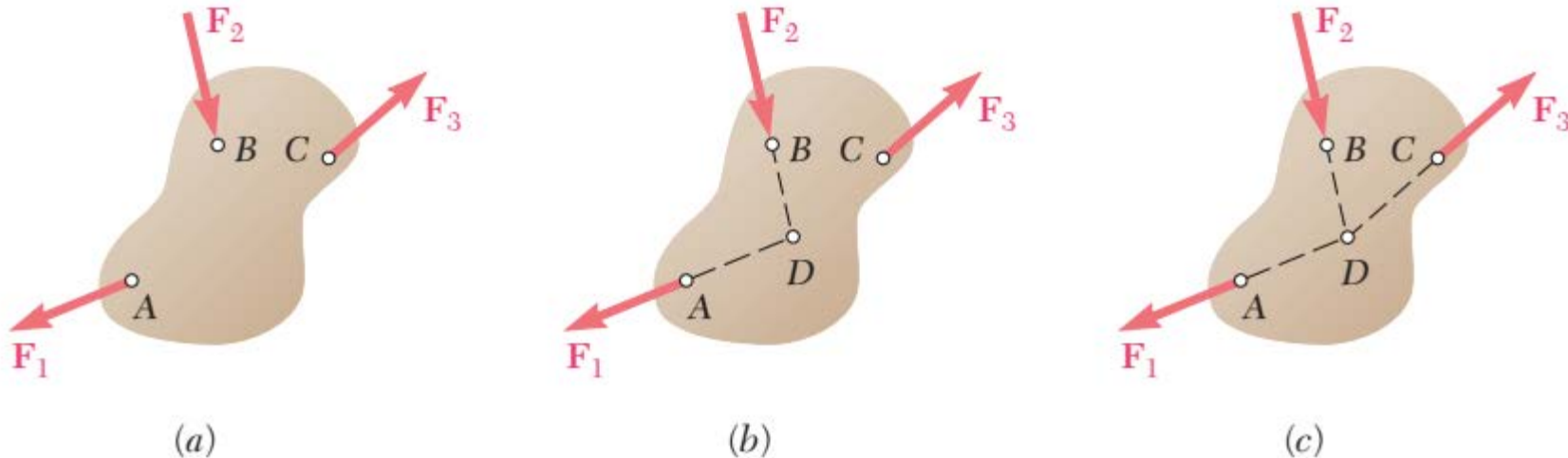
Cisim denge halindeyse, üç kuvvetin etki çizgisi ya kesişen yada paralel olmalıdır.

Rijit cisim denge halinde olduğu için, herhangi bir eksen çevresinde  $F_1$ ,  $F_2$  ve  $F_3$  kuvvetlerinin momentlerinin toplamı sıfır olmalıdır.

$F_1$  ve  $F_2$  kuvvetlerinin etki hatlarının kesiştiklerini varsayarak ve bunların D noktasında kesiştiklerini göz önüne alırsak, D etrafındaki momentleri toplarız. (Şekil b).

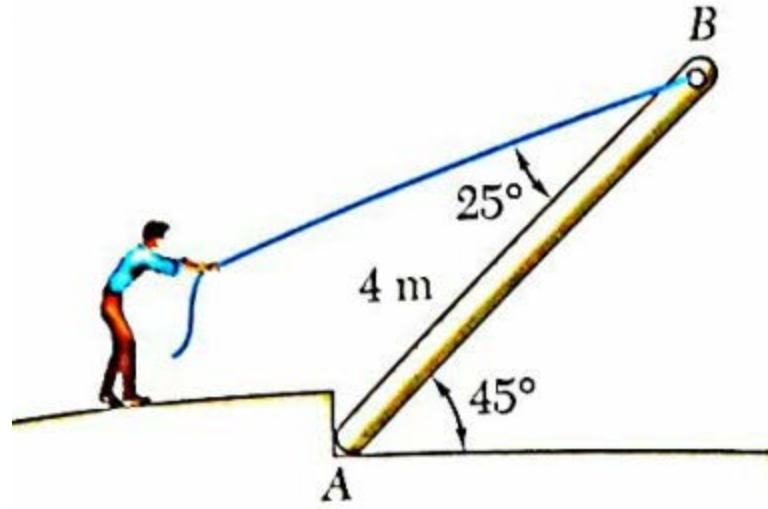
D etrafında  $F_1$  ve  $F_2$  'nin momentleri sıfır olduğu için, D etrafında  $F_3$  'ün momentini de sıfır olmalı;  $F_3$  'ün etki hattı D'den geçmelidir. (Şekil c).

Bu nedenle, üç etki hattı kesiştirilir. Tek istisna çizgilerin hiçbirinin kesişmediği, çizgilerin paralel olduğu durumda ortaya çıkar.

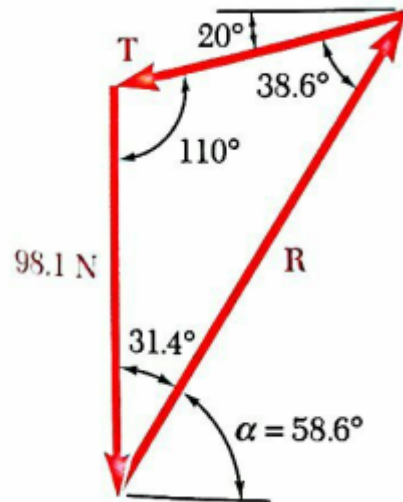
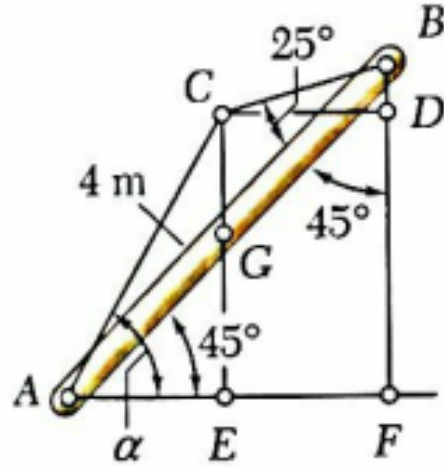


## Örnek problem 4.6

Bir adam kütlesi 10 kg, uzunluğu 4 m olan bir kirişi ip ile çekerek kaldırmaktadır. İpteki çekme kuvveti  $T$  ile A'daki tepkiyi bulunuz.



## Örnek çözüm 4.6



**Serbest Cisim Diyagramı.** Kiriş üç kuvvet elemanıdır. Çünkü üzerinde üç kuvvet etki etmektedir: Ağırlık  $W$ , ipin uyguladığı kuvvet  $T$  ve zeminin A'daki tepkisi  $R$ .

$$W = mg = (10 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 98.1 \text{ N}$$

**Üç Kuvvet Elemanı.** Kiriş üç kuvvet elemanı olduğu için üzerinde etki eden kuvvetler aynı noktadan geçmelidir. Bu sebeple  $R$  tepkisi, ağırlık  $W$  ile çekme kuvveti  $T$ 'nin etki çizgilerinin kesişim noktası  $C$ 'den geçecektir. Bu durum  $R$ 'nin yatay ile yaptığı  $\alpha$  açısını bulmak için kullanılacaktır.

$BF$  düşeyini  $B$ 'den,  $CD$  yatayını  $C$ 'den geçecek şekilde çizersek

$$AF = BF = (AB) \cos 45^\circ = (4 \text{ m}) \cos 45^\circ = 2.828 \text{ m}$$

$$CD = EF = AE = \frac{1}{2}(AF) = 1.414 \text{ m}$$

$$BD = (CD) \cot (45^\circ + 25^\circ) = (1.414 \text{ m}) \tan 20^\circ = 0.515 \text{ m}$$

$$CE = DF = BF - BD = 2.828 \text{ m} - 0.515 \text{ m} = 2.313 \text{ m}$$

yazarız. Buradan

$$\tan \alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2.313 \text{ m}}{1.414 \text{ m}} = 1.636$$

$$\alpha = 58.6^\circ \quad \blacktriangleleft$$

Artık kirişe etki eden bütün kuvvetlerin doğrultusunu biliyoruz.

**Kuvvet Üçgeni.** Görülen kuvvet üçgeni çizilir ve iç açları kuvvetlerin bilinen yönünden hesaplanır. Sinüs kanununu kullanarak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\frac{T}{\sin 31.4^\circ} = \frac{R}{\sin 110^\circ} = \frac{98.1 \text{ N}}{\sin 38.6^\circ}$$

$$T = 81.9 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

$$R = 147.8 \text{ N} \quad \blacktriangleleft 58.6^\circ$$



## 4.3 Üç boyutlularda denge

Rijit cisim dengesinin en genel durumu üç boyutta oluşur. Bu durumların modeli ve analizi iki boyuttakine benzemektedir. Önce, serbest cisim diyagramı çizilir. Sonra, denge denklemleri yazılır ve çözümlenir. Ancak daha fazla denkleme, daha fazla değişkene sahip olursunuz. Ek olarak, mesnet ve bağlantılardaki tepkiler daha değişken olabilir; üç kuvvetin bileşenleri, bir noktaya etkiyen kuvvet çiftleri ortaya çıkabilir.

### Üç boyutluda rijit cisim dengesi

Genel üç boyutlu durumda, rijit cismin dengesi için koşulların tanımlanmasında altı skaler denkleme gereksinim duyulur:

$$\begin{array}{l} \text{Skaler denklemler:} \\ \Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \end{array}$$

## 4.3 Üç boyutlularda denge

### Üç boyutluda rijit cisim dengesi

Genellikle mesnetlerdeki veya bağlantıdaki reaksiyonları temsil eden bilinmeyen altıdan fazla olmayan denklemleri çözebiliriz.

Çoğu problemde, ilk önce vektör formunda göz önüne alınan katı cismin dengesine ilişkin koşulları yazarsak, yukarıda verilen skalar denklemleri daha kolay çözümleyebiliriz.

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{0}$$

Burada  $\mathbf{F}$  kuvvet vektörleri ve  $\mathbf{r}$  konum vektörleri skaler bileşen ve birim vektörlere göre tanımlanır.

O noktasının akılcı seçimi ile bilinmeyen üç reaksiyon bileşenini ortadan kaldırabileceğimizi unutmayın.

O noktasının akılcı bir seçimi ile bu hesaplamalardan bilinmeyen üç reaksiyon bileşenini ortadan kaldırabileceğimizi unutmayın.

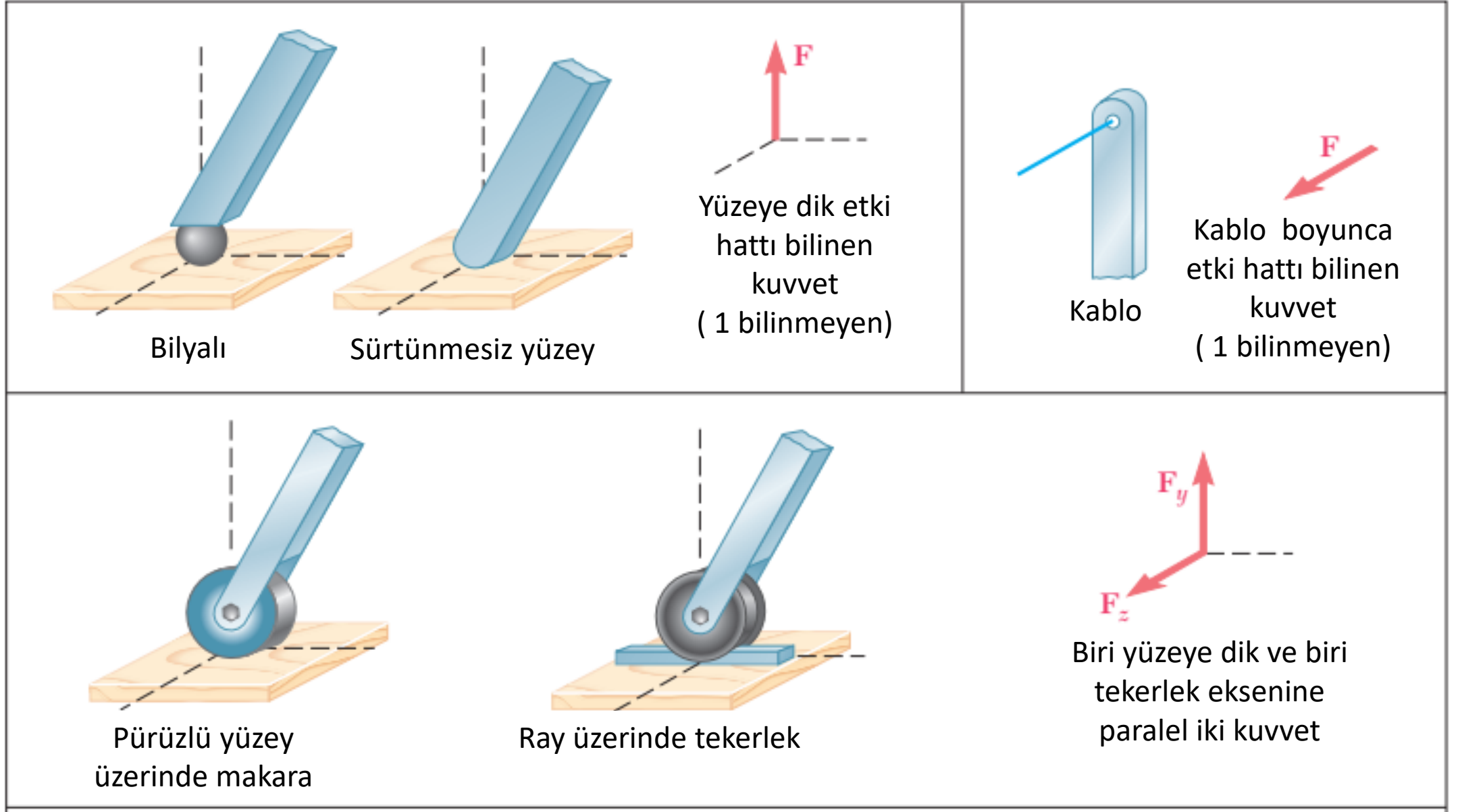
Denklemdaki iki ilişkinin her birinde birim vektörlerin katsayılarını sıfıra eşitlemek suretiyle; istenen skaler denklemleri elde ederiz.

Bazı denge problemleri ve bunlarla ilişkili serbest cisim diyagramları bireysel  $\mathbf{M}_i$  çiftlerini ya uygulandıkları yüklerle ya da destek reaksiyonlarını içerebilir. Bu gibi durumlarda, bu çiftleri, yukarıdaki denklemin ikinci kısmını tanımayarak yerleştirebilirsiniz.

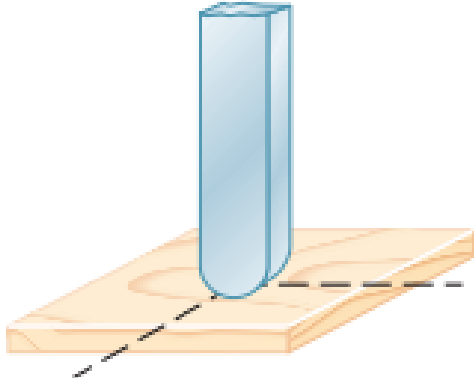
$$\Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) + \Sigma \mathbf{M}_i = \mathbf{0}$$

## 4.3 Üç boyutlularda denge

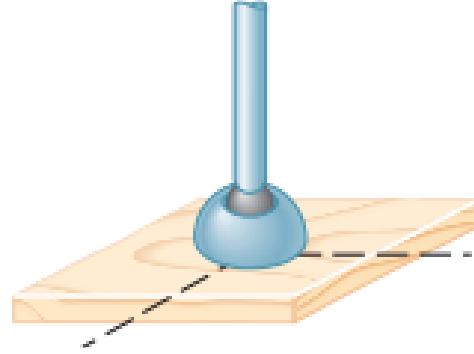
### Üç boyutlu mesnetler ve bağlantılardaki tepki kuvvetleri



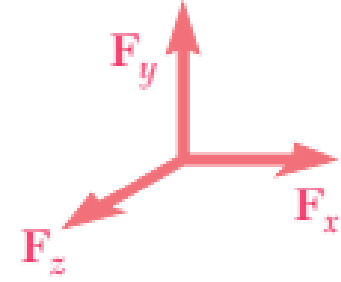
# Üç boyutlu mesnetler ve bağlantılardaki tepki kuvvetleri



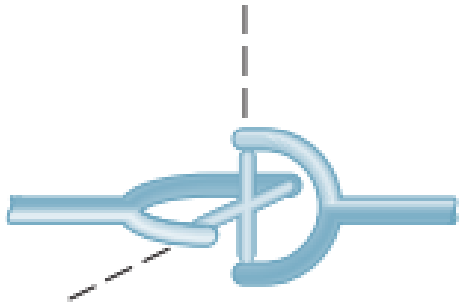
Pürüzlü yüzey



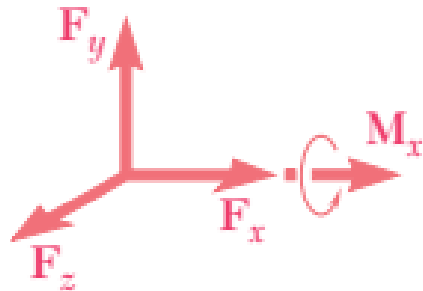
Bilyalı mafsal



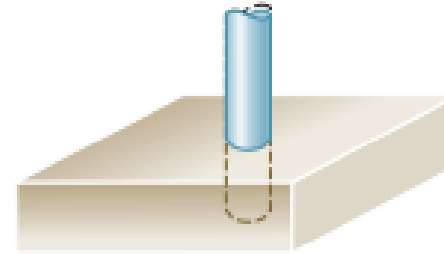
Temas noktasına dik üç kuvvet bileşenleri



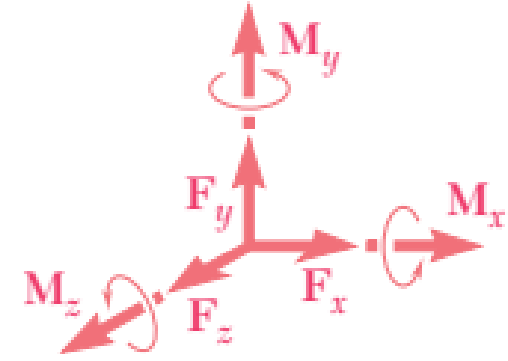
üiversal mafsal



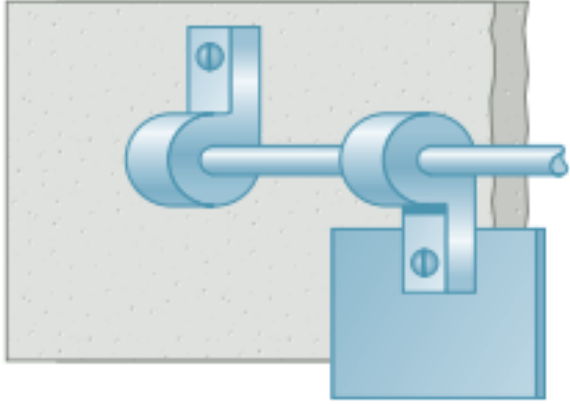
Üç kuvvet bileşeni, bir moment çifti



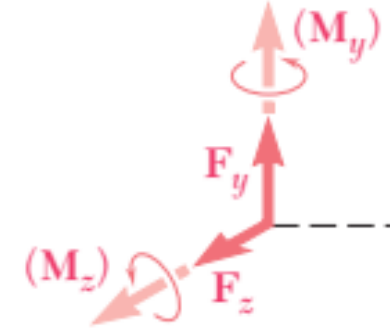
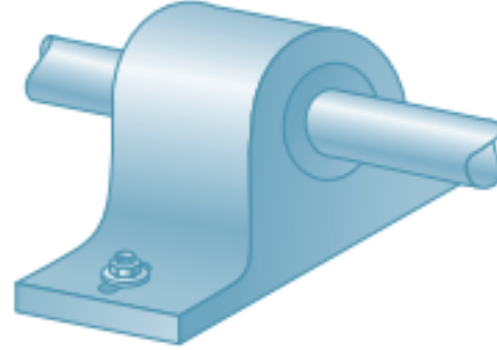
Sabit mesnet



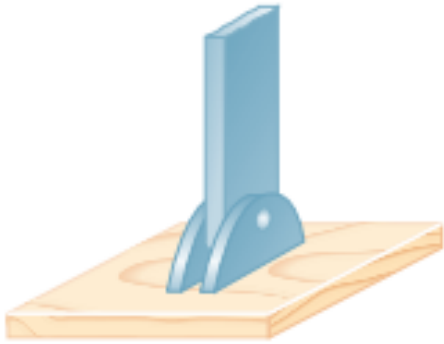
Üç kuvvet bileşeni, Üç moment çifti (yer değiştirme yok, dönme yok)



Sadece radyal yükü sabitleyen menteşe ve yatak



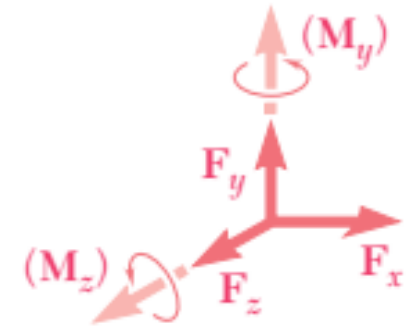
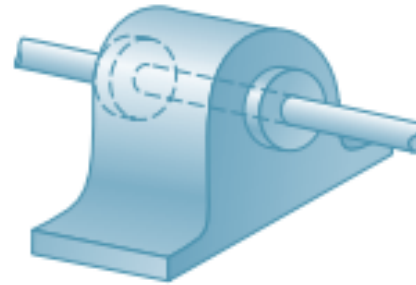
İki kuvvet bileşeni,  
iki moment çifti



Pim ve bağlantı mesnedi



Eksenel itme ve radyal yükü  
sabitleyen menteşe ve yatak



Üç kuvvet bileşeni,  
iki moment çifti