İST 304 İstatistik Karar Kuramı ve Yöntemleri **Hafta I**

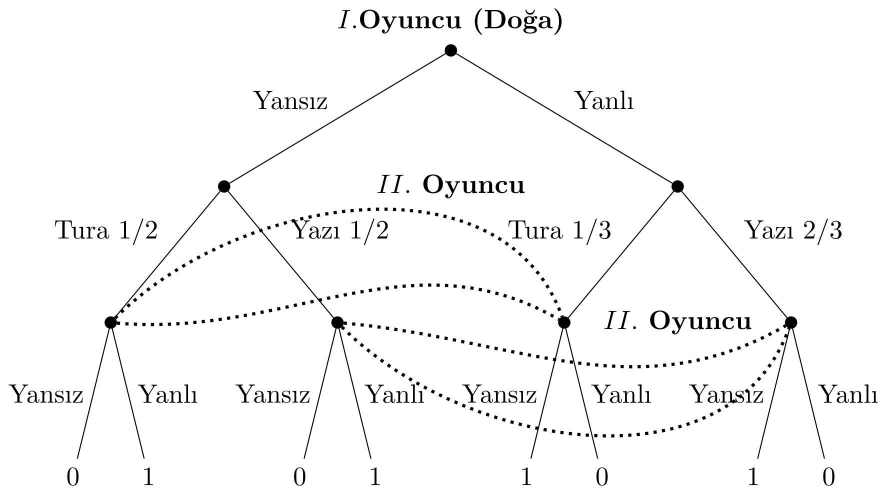
Ders 1 : Bir Oyun ve İstatistiksel Hipotezlerin Testi

Dersi anlatan: İhsan Karabulut *Notları yazan: İhsan Karabulut*

Not: *LaTeX ders kalıbı UC Berkeley EECS Bölümü'nündür.*

Bu derste örnek olarak sunulacak olan iki kişilik basit bir para atma oyunu aşağıda sunulmuştur [1]. Her ne kadar basit olsa da oyunun yalnızca bir gözlem kullanarak istatistiksel karar vermeyi sergilediği düşünülmektedir. I. Oyuncu istenirse kazanma güdüsü olmayan *doğa* olarak da adlandırılabilir. Karar verme kuramında kullanılan doğa yakıştırması, gözlem kullanılarak bir karar verme olduğunun anlatıldığı istatistik dersinin ilerideki konularında rasgele gözlemlerin dağılımı anlamıyla da örtüşecektir.

I. Oyuncu iki adet madeni paraya sahiptir. Paralardan biri yansız olup diğeri yanlıdır. Yanlı olan paranın rasgele atılması ile tura gözlemlenmesi olasılığı $1/3$ tür. I. Oyuncu hangi paranın yanlı olduğunu bilmektedir. Oyunda ilk hamleyi I. Oyuncu yapar, elindeki paralardan birini seçer ve yazı-tura atışı yapar ve gözlediği sonucu II. Oyuncuya söyler. Oyunda hamle sırası II. Oyuncuya gelir. II. oyuncunun hamlesi ise I. Oyuncunun yazı-tura atışı sonucuna bakarak I. Oyuncunun yanlı parayı mı yaksa yansız parayı mı atmış olabileceğini *tahmin* etmektir. Eğer II. Oyuncu doğru tahmin yaparsa kayıp kazanç 0(sıfır) dır. II. Oyuncunun tahmini doğru değilse I. Oyuncu 1 birim kazanacaktır ya da II. Oyuncu 1 birim kaybedecektir. II. Oyuncunun kazancı -1 birim olacaktır. Bu oyun genişletilmiş formda oyun ağacı ile aşağıda verilmiştir. Noktalı ve kavisli çizimler II. Oyuncunun informasyon(malumat) kümelerini göstermektedir; bu kümelerle II. Oyuncu, I. Oyuncu tarafından hileli ve hilesiz paralardan birinin belirlenip rasgele atılmasıyla paranın gözlenen



Şekil 1.1: Örnek olarak verilen iki kişilik oyunun genişletilmiş formda oyun ağacı.

sonucu hakkında informasyona sahipken hangi paranın atıldığı informasyonuna sahip olmadığı anlatılmaktadır.

Dersin konusu olmamakla beraber oyun ve karar verme teorilerinin istatistik karar vermedeki rolünü daha anlaşılabilir kılmak için oyunun çözülebilir forma sokulması aşağıda gösterilmiştir.

I. Oyuncunun stratejilerinin -bir oyuncunun oyunun başından sonuna kadar oynayacağı hamlelerin yer aldığı yönergelerin herbiri ya da bir oyunda baştana sona oyunu oynama yönergelerinin- kümesi $X = \{\text{Yansız, Yanlı}\}$ dir. Yansız para seçimi 1 ve yanlı para seçimi 2 ile gösterilirse bu küme $X = \{1, 2\}$ ile gösterilebilir. II. Oyuncunun *stratejilerinden birisi* tura gözlendiğinde yanlı para olduğunu söylemek, yazı gözlendiğinde ise yansız para olduğunu söylemektir (tahminde bulunmak, yada öyle olduğuna karar vermek). Bu oyuncunun kullanabileceği stratejilerin kümesi dört elemanlıdır ve $Y = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ dır. II. Oyuncunun örnek olarak verilen stratejisi Y kümesinde yer alan $(2, 1)$ ile gösterilmiştir. Aşağıda $x \in X$ ve $y \in Y$ olarak kullanılmıştır.

Rasgele hareketlerin sonucu olarak I. ve II. oyuncuların sırasıyla $x = 1$ ve $y = (1, 2)$ stratejilerini seçmiş olmaları halinde I. oyuncunun beklenen kazancı

$$\begin{aligned} M(x,y) &= M(1,(1,2)) \\ &= \frac{1}{2}.0 + \frac{1}{2}.1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

I. ve II. oyuncular sırasıyla $x = 2$ ve $y = (1,2)$ stratejilerini seçtiklerinde ise I. oyuncunun beklenen kazancı

$$\begin{aligned} M(x,y) &= M(2,(1,2)) \\ &= \frac{1}{3}.1 + \frac{2}{3}.0 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

olur. I. Oyuncuya göre beklenen kazanç II. Oyuncuya göre beklenen kayıp olarak değerlen- dirilecektir. Bu ise yukarıda da ifade edildiği gibi $M(2,(1,2)) = -1/3$ olarak hesaplanacaktır. Özetle I. *Oyuncuya göre* beklenen kayıp ve kazançlar bir matris ile ifade edilebilir. Bu ifade biçiminde I. Oyuncunun i. stratejisini seçmesi halinde II. Oyuncunun her bir j. strateji seçimine karşılık beklenen kazançları i. satır vektörü ile; II. Oyuncunun j. stratejisini seçmesi halinde I. Oyuncunun her bir i. strateji seçimine karşılık beklenen kazançları j. sütun vektörü ile gösterilmiş olacaktır. Örneğin bu matrisin (2,3) konumunda yer alan değer ile I. Oyuncunun 2. stratejisini ve II. Oyuncunun 3. stratejisini seçmesi ile I. Oyuncunun beklenen kazancı gösterilmiş olacaktır. Buna tanımlamaya göre I. *Oyuncuya göre* beklenen kayıp ve kazanç matrisi

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

olacaktır. I. Oyuncu kazancını ençok(maksimum) yapmak için(”iyi”) 1 stratejisini 4/7 olasılıkla 2 stratejisini 3/7 olasılıkla oynamalıdır. II. Oyuncu ise kazancını ençok (veya kaybını enaz)yapmak için $(1, 1)$ stratejisini 1/7 olasılıkla , $(1, 2)$ stratejisini 6/7 olasılıkla oynamalı ve diğer stratejilerini hiçbir şekilde seçmemelidir. Bunlar I. ve II. oyuncular için en iyi stratejiler olup oyunun değeri 3/4 dür. I. Oyuncu kazançlıdır ve II. Oyuncunun kaybedebileceği enaz değerdir.

Oyunun çözümlenmesi bu dersin konusu olmamakla birlikte bu oyunda derse konu olabilecek pek çok kavram vardır. Yeri geldikçe bu kavramlar ele alınacaktır. Yukarıdaki oyun için bazı saptamalar yapılabilir:

- Verilen örnek oyunda oyuncular oyunun kurallarını bilmekte ve biri rakibinin hangi hamleleri yapabileceğini ya da hangi stratejileri seçebileceğinden haberdardır. Oyuncuların her biri en az diğeri kadar akıllıdır.

- Bu oyunun çözümlenmesi sonucu ortaya çıkan "iyi" stratejiler yukarıda verilen strateji kümelerinde verilen belirli sayıdaki stratejilerden biri değildir, bunların rasgelelik temelinde seçimi ile oluşturulanlardan birisidir.Sonuç olarak stratejiyi uygulayacak oyuncu da başlangıçta hangi stratejiyi uygulayacağını bilmememekte ve bunları belirli olasılıklarla rasgele belirlemektedir. Oyuncuların sonlu sayıda strateji seçeneklerinden biri yerine sayılamaz sonsuzlukta rasgeleleştirilmiş seçeneklerden birini seçmeleri onlara daha az kayıp ya da daha fazla kazanç sağlayabilir.

- Oyunun sonlandığı yerlerde I. Oyuncunun kazançları yer almaktadır. Kayıp veya kazançlar oynanan stratejinin oyuncuya vereceği fayda konusunda bir ölçüt ortaya koymaktadır. Oyuncunun sağlayacağı fayda hangi stratejiyi seçmesi gerektiği konusunda etkileyici hatta *kararını vermesi konusundaki ilkeleriyle birlikte* belirleyici bir işlevi vardır.

- Oyunda yer alan unsurlardan, oyuncuların seçenekleri, stratejileri ve kayıp- kazanç- larının bazı varsayımlarla birlikte kullanılması oyunun matematiksel olarak modellenip işlenmesine olanak sağlamıştır.

Son saptamadan başlayarak aşağıdaki kayıp-kazançları para olan oyunları ve içinde bulunulan durumlarla birlikte ele alıp değerlendirmesini yapmak paranın miktarı ve değeri ile sağladığı fayda konusunu gözden geçirmemizi sağlayabilecektir. Hemen belirtilmeli ki dersin konusu istatistiksel karar vermedir ve çoğu kez istatistikçiler üzerinde çalıştıkları olaylar ve olgular üzerine istatistiksel çıkarım yaparken fayda için para yerine çoklukla başka ölçütler kullanırlar.

1. Hilesiz madeni bir paranın rasgele atılması sonucunda eğer tura gözlenirse 2TL kazanıldığı, yazı gözlenirse 1 TL nin kaybedildiği bir oyuna girme konusundaki kararınız ne olurdu?

2. Bu güne göre oldukça yüksek bir miktar olan 10,000,000 TL paranızın olduğunu varsayalım. Eğer hilesiz para deneyinde(rasgele atışında) gözleminiz tura ise 20,000,000 TL daha kazanacağınız yazı gözlenirse elinizdeki parayı kaybedeceğiniz oyuna girer miydiniz?

3. Bir kumar oyununa katılsam diye istekli olduğunuzu düşününüz. Eliniz de de 3 TL paranız olsun. Böyle bir kumar oyunu fırsatı yakaladınız fakat oyuna girme parası 5 TL dir. Bu arada size şöyle bir kumar önerisinde bulunulmuş olsun : hilesiz bir paranın rasgele atılışında tura gözlenirse 3 TL kazanılacak yazı gözlenirse 3TL kaybedilecektir.

Bu durumlara karşı bireylerin kumara katılma tepkileri başka başka olacaktır, bireyler “paranın değeri” ile ”paranın miktarı”nın aynı olmayabileceğinin ayırdında olacaklardır.

İST 304 İstatistik Karar Kuramı ve Yöntemleri **Hafta I**

Ders 2 : Seçim Aksiyomları ve Önemli Sonuçları

Dersi anlatan: İhsan Karabulut *Notları yazan: İhsan Karabulut*

İstatistiksel tümevarım *istatistikçi* ile *doğa* arasında oynanan iki kişilik bir oyun olarak da tarif edilebilir. Bu oyunda oyuncuların her ikisinin de kazancını en yüksek yapmaya çaba gösteren, *akıllı* karar vericiler oldukları varsayımı farklı olarak yorumlanmalıdır. Bu anlamda istatistiksel tümevarım bir karar verme sürecidir. Bu sürece etki eden unsurlar *seçilebilecek* eylemlerin kümesi, karar vermeye konu olan ortam ve olgulara hakim olan *kanun*lar ve verilen ortamda alınan eylem kararı ile doğan sonuçlar olarak özetlenebilir [2]. Karar vermeye konu olan ortam ve olgulara hakim olan yasalar istatistik terminolojisine de uygun olarak *doğanın durumu(state of nature)* olarak adlandırılacaktır.

İstatistik matematiksel bir model çerçevesinde rasgelelik altında karar vermek olarak nitelendirilebilir. İstatistiğin meta biliminin karar kuramı olduğu ifade edilmekle beraber, kendine özgü yaklaşımları ile istatistiği yönlendirmekten daha çok; geliştirilen veya önerilen tahmin edicilerin, test istatistikleri vb. istatistiklerin değerlendirilmesi ve olgunlaştırılmasında bir yol gösterici olarak değerlendirmek uygun olacaktır. Örneğin, bir parametre tahmin edicisi karar kuramına başvurulmadan da önerilebilir. Ancak, önerilen bu tahmin edicinin diğer tahmin ediciler içinde değerlendirilmesi karar kuramı çerçevesinde çeşitli ölçütler kullanılarak yapılabilir.

Genel olarak karar problemlerinin analitik olarak çalışılmasında matematiksel bir model veya doğanın herhangi bir durumu karşısında verilecek kararla yüz yüze kalına- cak sonuçlar arasında bir *sıralama* üzerinde *varsayımda* varsayımda bulunmak gerekli görülür. Bu sıralamanın bir ucunda kazanç, ödül , faydalı olma veya mutluluk diğer ucunda kayıp, ödeme, rahatsızlık veya felaket vb.. sonuçlar yer alır. Böyle bir sıralama ile karar vericinin amacı gerçekten istenilene - maksimuma - ulaşmaktır.

Belirli bir doğa durumunda karar vermeye konu olan olgu karşısında karar verme nedeniyle yüz yüze kalınan durum **sonuç** (consequence) olarak adlandırılacak **fayda**ya konu olan duruma ise karşılaşılabilecek durumlardan biri anlamında **seçenek** (pros- pect) denilecektir. Örneğin, yemek için lokantada bulunan bir bireyin var olan et çeşitlerinden dana eti, tavuk eti ve balık eti birer seçenektir. Bunlardan birine karar vermesiyle, söz konusu bireye sindirimle ilgili etkileri, hem kendi hem de ilgili et sektörüne etkileri, yemekten duyduğu haz, sağlığına etkileri gibi pek çok sonuç ortaya çıkacaktır. Bu anlamda yukarıdaki seçenek bir sonuçtur çünkü yapılan seçim sonucunda yüz yüze kalınmıştır.

Bu seçenekleri sadece sıralamaya sokmak değil, reel sayılar ekseninde sayısal bir ölçü atayacak olunursa karar vermenin matematiksel çözümlemesi daha basit olabilecektir. Karar vericinin değişik seçenekler arasında yaptığı tercihler makul (akla uygun) varsayımlarla böyle bir fonksiyon elde edilebilir. Bu fonksiyon **fayda** fonksiyonu olarak adlandırılacaktır. Fayda fonksiyonu seçenekler (yada sonuçlar!) üzerinde tanımlanır ve her bir seçeneğin göreli olarak arzulanırlığının (desirability) sayısal ölçümlemesidir.

Karar vericinin belirli bir akılcılığa (gerçekçiliğe-rationality) göre davranıyor olması halinde böyle bir fonksiyonun varlığı matematiksel olarak kanıtlanabilir. Ancak böyle bir fonksiyonun söz konusu durumda ne kadar duyarlı olduğu her zaman kolay değildir. Bu nedenledir ki teorinin kullanılırlığı zorluklarla karşılaşır.

Tercih Aksiyomları:

Tercihlerle ilgili olarak sunulacak aksiyomlar karar vericinin vereceği kararlar sonucu yaptığı eylemin sonucunu ölçebileceği varsayılan fayda fonksiyonunun varlığının gösterilmesine yarayacaktır. Bunun için standart olarak kullanılagelen birtakım gösterimlere ihtiyaç var.

Eğer $P_1,\ P_2$ iki **seçenek** olsunlar. $P_1 \succeq P_2$ gösterimi P_1 seçeneğinin en az (at least as desirable) P_2 seçeneği kadar arzu edilir(edilebilir) olduğunu; en az P_2 kadar veya ondan daha çok tercih edilebilirliği; $P_1 \sim P_2$, P_1 ve P_2 seçeneklerinin her ikisinin eşit(aynı) tercih edilebilirliklerini ve $P_1 \succ P_2$, P_1 seçeneğinin P_2 seçeneğine (kesinlikle) tercih edilebilirliğini gösterecektir.

$P_1 \sim P_2$ yukarıdaki gösterimle $P_1 \succeq P_2$ **ve** $P_1 \preceq P_2$ ifadesine denktir. $\sim$ bağıntısı yansımalı(reflexive) $P_1 \sim P_2$ ve $P_2 \sim P_1$ dir. $\sim$ simetriktir yani $P_1 \sim P_2$, $P_2 \sim P_1$ e denktir. Bu bağıntıların geçişli(transitivity) olduğu da varsayılacaktır: $P_1 \succeq P_2$ ve $P_2 \succeq P_3$ ise $P_1 \succeq P_3$ dür. Bunların sonucu olarak P, Q ve R birer seçenek olmak üzere

$P \sim Q, \quad Q \sim R$ ise $P \sim R$

$P \succeq Q, \quad Q \sim R$ ise $P \succeq R$

$P \succ Q, \quad Q \sim R$ ise $P \succ R$

$P \succ Q, \quad Q \succ R$ ise $P \succ R$

olduğu gösterilebilir.

Tercih yapılacak kümede yer alan $P_1, P_2, \cdots, P_m$ (sade) seçeneklerinin herhangi birini belirlemek yerine bu seçeneklerden biri bu seçenekler üzerinde tanımlanan bir olasılık ölçüsüne göre rasgele belirlenebilir. Bu tür bir seçim bir karar verme probleminde karşılaşılabilen bir durumdur. örneğin, P_1 ve P_2 herhangi iki seçenek ise hilesiz madeni bir parayı rasgele havaya atarak bu seçeneklerden biri tercih olarak belirlenebilir. Bu durumda tercih kümesinde yer almayan yeni bir seçenek tanımlanmış olur: $p = (p_1, p_2) = (1/2, 1/2)$ olmak üzere bu seçenek $[P_1, P_2]_p$ olarak gösterilecektir. Bu gösterim herhangi bir m tane seçenek için p bu m tane seçenek üzerinde tanımlanmış olmak üzere $[P_1, P_2, \cdots, P_m]_p$ olacaktır. Bu şekilde tanımlanmış seçenekler **karma**(mixed) veya **rasgeleleştirilmiş** (randomized) olarak adlandırılır. Bu tanımlama sayılabilir sonsuz sayıda seçenek için de yapılabilir.

Aksiyomlar:

Aşağıda $P, \ Q, \ R, \ P_i, \ Q_i, \ i = 1, 2, 3, \cdots$ seçenekleri göstermektedir.

A1- P, Q seçenekleri arasında $P \succ Q$ veya $P \prec Q$ veya $P \sim Q$ bağıntıları vardır.

A2- $P \succeq Q$ ve $Q \succeq R$ ise $P \succeq R$ dir.

A3- $p = (p_1, \ p_2)$ olasılık, $P_1 \succeq P_2$ ve P herhangi bir başka seçenek olmak üzere

$$[P_1,\, P]_p \succ [P_2,\, P]_p$$

dir.

A4- $P_1 \succ P_2 \succ P_3$ tercih sıralaması verildiğinde

$$P_1 \succ [P_1, P_3]_p \succ P_2 \succ [P_1, P_3]_{p^*} \succ P_3$$

olacak $[P_1, P_3]_p$ ve $[P_1, P_3]_{p^*}$ gibi iki karma seçenek vardır.

A3 aksiyomu daha "güçlü" olarak aşağıdaki gibidir:

A3′- $P_1, P_2, \cdots$ ve $Q_1, Q_2, \cdots$ seçeneklerin $i = 1, 2, 3, \cdots$ için $P_i \succ Q_i$ olan iki seçenek- ler dizisi ise

$$[P_1, P_2, \cdots]_p \succ [Q_1, Q_2, \cdots]_p$$

dir.

A1, herhangi iki seçenekten birinin diğerine tercih edilir ya da eşit olarak tercih edilebilir olduğunu; A2, geçişliliği ifade edip birinin tercihleri sıralamasının matematiksel yapı içinde tutarsızlıklarını giderme amaçlıdır. Bu tür tutarsızlıklar tercih seçimlerine yansıyabilir. örneğin, birey kahveyi çaya, çayı da süte tercih etmesine karşın yine de sütü kahveye tercih edebilir! A3,

A3, sonlu bir karma seçenekte karmada yer alan seçeneklerden birinin ona göre tercih edileniyle değiştirilmesi ile elde edilecek karma seçenek önceki karma seçeneğe tercih edilir olacaktır.

A4, biraz daha açıklama gerektirmekte, ancak A3 aksiyomundan hareketle $P_1 \succ P_2 \succ P_3$ olduğunda şunu söyleyebiliriz: Daha tercih edilebilir bir P_1 yoktur ki en küçük bir olasılıkla P_3 ü P_2 den daha tercih edilebilir yapsın.

Bu aksiyomların iki önemli sonucu aşağıda verilmiştir:

a) $P_1 \succ P_0$ ve $0 < p < 1$ ise $P_1 \succ [P_1,\, P_0]_p \succ P_0$ dir.

Birbiri ile aynı tercih edilebilirliğe sahip olmayan iki seçeneğin açık olmayan(ne $p = 0$ ne de $p = 1$ olan) herhangi bir karması bu iki tercihin arasında bir tercih edilebilirliğe sahiptir. Çünkü P_1 ile $[P_1, P_1]_p$ve P_0 ile $[P_0, P_0]$ aynı tercihler olacaktır ve A3 ile

$$P_1 \sim [P_1, P_1]_p \succ [P_1, P_0]_p \succ [P_0, P_0]_p \sim P_0$$

dır.

b) Eğer $0 \leq q < p \leq 1$ ve $P_1 \succ P_0$ ise $[P_1, P_0]_p \succ [P_1, P_0]_q$ dur. p arttıkça $[P_1, P_0]_p$ karma seçeneği daha küçük olan p olasılığına göre tercih edilebilir olur.

$q < p$, $p \neq 0$, $P_0 \prec P_1$ iken $[P_1, P_0]_q \sim \left[[P_1, P_0]_p, P_0\right]_{q/p}$ dir (şimdilik kabul edilsin). O halde

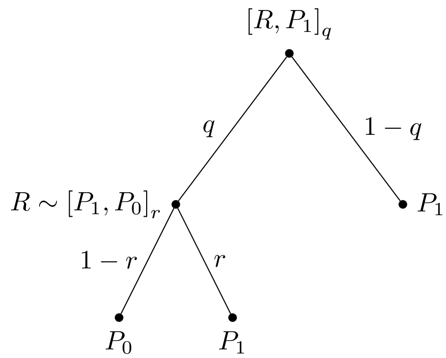
$$[P_1, P_0]_q \sim \left[[P_1, P_0]_p, P_0\right]_{q/p} \prec \left[[P_1, P_0]_p, [P_1, P_0]_p\right]_{q/p} \sim [P_1, P_0]_p$$

olur.

(b) sonucunun gösteriminde de kullanılan, karma seçeneklerin oluşturulması veya değişik fakat denk tanımlamalar yapılabilmesi işlemi üzerinde durmaya değerdir. Bu tanımlamalar yapılırken karar vericinin bir olasılık dağılımına göre seçenekler kümesi içinden yapacağı seçimi birbirinden bağımsız yaptığı varsayılacaktır. Aşağıdaki örnek bunu göstermek için verilmiştir.

Örnek. $r, q \in (0, 1)$ olmak üzereP_0 ve P_1 seçenekleri kullanılarak $r \in (0, 1)$ olmak üzere $R \sim [P_1, P_0]_r$ ve $P \sim [R, P_1]_q$ karma seçenekleri tanımlanmış olsun. $P \sim [R, P_1]_q$ karma seçeneği $P \sim [P_0, P_1]_p$ karma seçeneğine denk olduğu gösterilebilir. P karma seçeneğinin uygulaması bir olasılık ağacı ile aşağıdaki gibi tarif edilebilir.

Şekil'den de görüldüğü gibi P karmasının uygulaması P_0 ve P_1 sade seçeneklerinin karması olarak sonuçlanır. Karar verici P_1 seçeneğini $1 - q$ olasılıkla *veya* önce q olasılıkla R karmasını seçip sonra r olasılıkla uygulayacaktır; P_1 seçeneği $(1 - q) + qr$ olasılıkla seçilir. Benzer olarak karar verici P_0 seçeneğini $q(1 - r)$ olasılıkla uygulayacaktır. $p = (1 - q) + qr > 0$ ve $p = (1 - q) + qr < 1$ olduğu



Şekil 2.2: P karma seçeneğinin uygulaması ve P_0 ve P_1 sade seçeneklerinin bir karması olarak gösterimi.

da görülebilir.

Örnek. Sonuç (b)'nin koşulları altında $[P_1, P_0]_q \sim \Big[[P_1, P_0]_p, P_0\Big]_{q/p}$ dır. q olasılıklı karmada p olasılıklı bir karmayı içererek q ve p olasılıklı karmaların karşılaştırılması amaçlanmıştır. $[P_1, P_0]_q \sim \Big[[P_1, P_0]_p, P_0\Big]_c$ olması ancak $c = q/p$ ise ile olanaklıdır. $\Big[[P_1, P_0]_p, P_0\Big]_c$ için yukarıdakine benzer bir olasılık ağacı çizimi ile P_1'in cp ve P_0'ın $c(1-p)+(1-c)$ olasılığı ile oluşturulan karmaya denk geldiği, bu denklik için de $c = q/p$ olması gerektiği görülür.

Yukarıdaki aksiyomların en önemli bir sonucu fayda fonksiyonunun varlığı teoremidir. Bu sonuca varmadan önce biri diğerine tercih edilebilir iki seçenek arasında yer alabilecek bütün karma seçeneklerin konumu ve tercih sıralanması konusundaki sonuç aşağıda verilmiştir.

Kaynaklar

[1] D. Blackwell and M.A. Girshick (1979), Theory of games and statistical decisions, *Dover Publications*, New York.

[2] H. Chernoff and L. E. Moses (1986), *Dover Publications*, New York.

[3] B. W. Lindgren (1971), Elements of Decision Theory, *Macmillan Company*, New

York.