İST 304 İstatistik Karar Kuramı ve Yöntemleri **Hafta III**

Ders 1 : Fayda Fonksiyonunun Özellikleri ve Genişletilmesi II

Dersi anlatan: İhsan Karabulut *Notları yazan: İhsan Karabulut*

Not: *LaTeX ders kalıbı UC Berkeley EECS Bölümü'nündür.*

 Şimdi fayda fonksiyonu sadece P_0, P_1 ve arasında bulunan

seçenekler için değil bütün seçenekler için tanımlanmış oldu. Ancak fonksiyonun 0 ve 1 fayda değerlerine sahip P_0, P_1 seçeneklerine dayalı olarak tanımlandığı görülmekte. P_0, P_1 çifti yerine Q_0 ve Q_1 çifti seçilip $V(Q_0) = 0, \;\; V(Q_1) = 1$ olan bir fayda fonksiyonu tanımlansaydı V fayda fonksiyonu U fayda fonksiyonundan farklı olacaktı. Bununla birlikte V, U nun lineer bir fonksiyonu olacaktır.

Bunu görmek için $V(P)$, $V(Q_0) = 0$ ve $V(Q_1) = 1$ olarak tanımlandığı fayda fonksiyonunun bir P seçeneği için değerini göstersin. Ayrıca

$$P_0 \prec P_1 \prec Q_0 \prec Q_1$$

olsun. Bu tercih sıralamasında değerlendirmede kolaylık dışında bir özellik yoktur. Önceki bilgiler kullanılarak

$$P_1 \sim [Q_0, P_0]_y \sim [Q_1, P_0]_z$$

olacak y ve z olasılık dağılımlarının bulunacağı bilinmektedir. U fayda fonksiyonu ve özellik B den

$$\begin{aligned} U(P_1) &= yU(Q_0) + (1-y)U(P_0) \\ U(P_1) &= zU(Q_1) + (1-z)U(P_0) \end{aligned}$$

elde edilip $U(P_1) = 1$ ve $U(P_0) = 0$ olduğundan $U(Q_0) = 1/y$ ve $U(Q_1) = 1/z$ bulunur. Şimdi de herhangi bir seçenek, örneğin

$$P_0 \prec P \prec P_1 \prec Q_0 \prec Q_1$$

tercih edilebilirliğine sahip olan P seçeneği ele alınsın. P ve Q_0 seçenekleri ile aynı tercih edilebilirliğe sahip karma seçenekler

$$P \sim [P_1, P_0]_p \ , \quad Q_0 \sim [Q_1, P]_w$$

sırasıyla p, w olasılık dağılımları ile oluşturulabilir. Buradan $U(p) = p$ olduğu hemen görülebilir. $V(P)$'nin

$$V(Q_0) = 0 = wV(Q_1) + (1-w)V(P)$$

eşitliği kullanılarak $V(P) = -w/(1-w)$ olduğu görülür.

$Q_0 \sim [Q_1, P]_w$ karma seçeneği için U fayda fonksiyonu, özellik B kullanılarak

$$\begin{aligned} U(Q_0) = \frac{1}{y} &= wU(Q_1) + (1-w)U(P) \\ &= \frac{w}{z} + (1-w)p \end{aligned}$$

w çekilerek $V(P) = -w/(1-w)$ de yerine konulursa

$$V(P) = \frac{U(P) - U(Q_0)}{U(Q_1) - U(Q_0)} = aU(P) + b$$

bulunur. Böylece $V(P)$'nin $U(P)$'nin bir doğrusal fonksiyonu olduğu görülür. Buraya kadar gösterilenlerle aşağıdaki teorem de kanıtlanmış olur.

Teorem. A1-A4 aksiyomları altında $P \succ Q$ olan her P seçeneği için $U(P) > U(Q)$ ve $U([P,Q]_r) = rU(P) + (1-r)U(Q)$ olan sonlu bir $U(P)$ vardır.

$U([P,Q]_r) = rU(P) + (1-r)U(Q)$ özelliği güçlendirilerek olanaklıdır sayılabilir sonsuzlukta seçenek ile oluşturulabilen bir karma seçenek için de yazılabilir. Bu daha önce verilmiş olan A3′ aksiyomunun kabul edilmesi halinde yapılabilir ve A3′ aksiyomunun ile birlikte fayda fonksiyonu sınırlı da olacaktır.

Teorem (Fayda fonksiyonu sınırlıdır). Aksiyom A1-A4 ve aksiyom A3′ kabul edil- diğinde U fayda fonksiyonu sınırlıdır; B bir sabit olmak üzere her P seçeneği için

$$|U(P)| \leq B$$

dir.

Teoremdeki aksiyom A1-A4 aksiyomları fayda fonksiyonunun varlığını garanti altına alır. A3′ aksiyomunu kabul edilsin ve $U(P)$'nin sınırlı olmadığı varsayılsın. P_1, $U(P_1) = 1$ olan bir seçenek olsun. $U(P)$ sınırlı olmadığından bir R seçeneği vardır ki $U(R) \geq 2$dir ve bu seçeneği P_2 olarak adlandırmış olmak bir şey kaybettirmez, yani $U(P_2) \geq 2$ olsun. Benzer olarak $P_3, P_4, \cdots$ için

$$U(P_n) \geq 2^{n-1}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda açıktır ki her $n = 2, 3, 4, \cdots$ için $P_n \succ P_1$ dir. A3′ aksiyomu kabul edildiğine göre verilen bir olasılık dağılımı $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ için şu tanımlama yapılsın: Bir n den sonraki seçenekler için bir R_n aşağıdaki gibi tanımlan- sın

$$R_n \equiv [P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3}, \cdots]_{(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \alpha_{n+3}, \cdots)} \succ [P_1, P_1, P_1, \cdots]_{(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \alpha_{n+3}, \cdots)}$$

Formal anlamda bir karma seçenek tanımlaması olmamakla birlikte A3′ ile

$$U(R_n) \succ U(P_1) = 1$$

olacaktır ve sayılabilir sonsuz seçenekle oluşturulan P karma seçeneği ile ilk n seçenek ile yukarıda tanımladığımız R_n "seçeneği" nin içerildiği iki karma seçenek denk olacaklardır, yani

$$P \equiv [P_1, P_2, \cdots]_{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)} = [P_1, P_2, \cdots P_n, R_n]_{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,q_n)}$$

olacaktır. Burada $q_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i = 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ dır. Ayrıca $n \to \infty$ iken $q_n \to 0$ olur. Olasılık dağılımı için $\alpha_i = 2^{-i}$ seçlisin ve $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1$ ve $\sum_{i=1}^{n} 2^{-i} = 1 - 2^{-n}$ olduğu hatırlansın. $U(P_n) \geq 2^{n-1}$ ve $U(R_n) > 1$ olduğunu da açıktır.

şu halde$U(P) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} U(P_i)$olacaktır. Diğer taraftan

$$U([P_1, P_2, \cdots, P_n, R_n]_{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,q_n)}) = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} P_i + q_n U(R_n)$$

yazılabilecektir. Yeniden düzenleme ile $U(P) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U(P_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i U(P_i)$ olacaktır.

$$\begin{aligned}
U(P) &= \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} U(P_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} U(P_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} U(P_i) + (1 - 2^{-n}) U(R_n) \\
&\geq \frac{1}{2} 1 + \frac{1}{2^2} 2 + \frac{1}{2^3} 4 + \cdots + \frac{1}{2^n} 2^{n-1} + (1 - 2^{-n}) U(R_n) \\
&> \frac{n}{2} + (1 - 2^{-n})
\end{aligned}$$

olduğu görülecektir. Sağ taraf n büyüdükçe sınırsızca büyüyecektir. Böyle olması bir çelişkidir. Öyle bir bir karma seçenek P bulunmuştur ki her i için $P \succ P_i$ ve her n için $P \succ R_n$dir, diğer aksiyomlar çiğnenmiş olur.

Teorem. Aksiyom A1-A4 ve aksiyom A3$'$ kabul edilirse

$$U([P_1, P_2, P_3, \cdots]_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots)}) = \alpha_1 U(P_1) + \alpha_2 U(P_2) + \alpha_3 U(P_3) + \cdots$$

dır.

Sayılabilir sonsuz sayıda seçenekle oluşturulan bir karma seçeneğin fayda fonksi- yonu değeri sonludur. (Not: Bir karma seçeneği oluşturan sade seçeneklerin fayda değerlerinin rasgele değişkenlerin aldığı değerler olarak düşünülmesiyle söz konusu karma seçeneğin "beklenen değeri" vardır ve sağ taraftaki toplama eşit olduğu benzetmesi yapılabilir.)

Kanıtlama:

Yukarıdaki gibi $P \equiv [P_1, P_2, P_3, \cdots]_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)} \equiv [P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, R_n]_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n, q_n)}$ olarak düşünülüp $U(P) = \alpha_1 U(P_1) + \alpha_2 U(P_2) + \alpha_3 U(P_3) + \cdots + \alpha_n U(P_n) + q_n U(R_n)$ yazılabilir. Buradan

$$U(P) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U(P_i) = q_n U(R_n)$$

yazılacaktır. $U(R_n)$nin sınırlı ve $n \to \infty$ iken $q_n \to 0$ olduğu biliniyor. Bu nedenle $q_n U(R_n) \to 0$ olacaktır. Toplam değeri vardır; yukarıdaki eşitlik yazılabilir.

İST 304 İstatistik Karar Kuramı ve Yöntemleri **Hafta III**

Ders 2 : Para için Fayda Fonksiyonu ve Uygulama Örnekleri

Dersi anlatan: İhsan Karabulut *Notları yazan: İhsan Karabulut*

Tipik olarak kumar oyunlarında ve iş dünyasında seçenekler çoğu kez para miktarlarıyla ifade edilebilir. Burada verilecek örneklerde sunulacak fayda fonksiyonu bir bireye ait parasal işler için tanımlanmıştır. Ancak bir bireyin karşı karşıya kaldığı her değişik durum için bir başka fayda fonksiyonu olacağını, her duruma uygun yada her zaman kesitine uygun tek fayda fonksiyonu olmayacağını akıldan çıkarmamak gerekir.

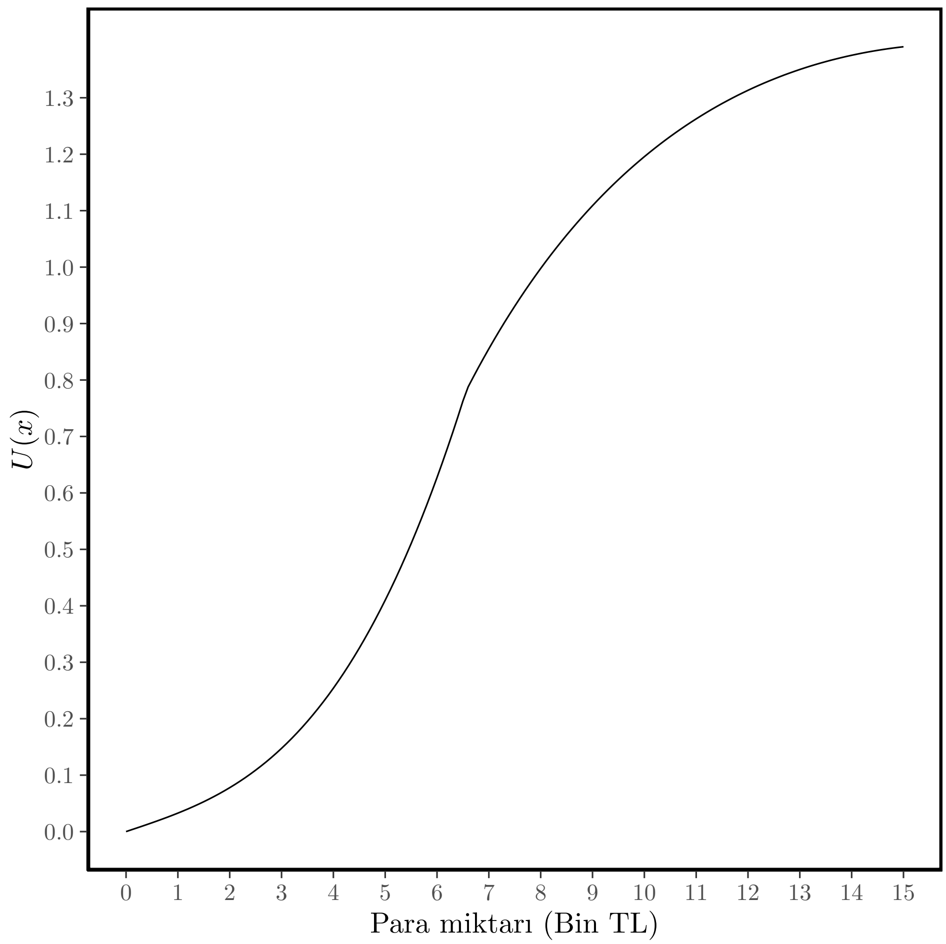
Örnek.

Birey **A** hali vakti yerinde kendisine her ay düzenli olarak gelir sağlayan iyi bir pozisyonda olduğunu düşündüğü bir işte çalışmaktadır. Disiplinli bir birey olarak bugüne dek nakit 8000TL birikimine sahiptir. Kendisi için para sadece yaşamında iyi şeylerden faydalanması için bir araçtır, parasının olması rahat hissetmesini harcamalarını da rahatça yapmasını sağlamaktadır. Bütün parasını kaybettiğini düşün- düğünde de bunun kendisinin daha tutumlu olmasına neden olabileceğini düşünmektedir. Örneğin böyle bir durumda biraz para biriktirene kadar bazı harcamalarına son verecek yeni bilgisayar almamaya direnecektir vb.. Fayda fonksiyonu değerleri hiç parası olmadığında $U(0) = 0$ ve eldeki tüm parası için $U(8000) = 1$ olup aşağıda çizilmiştir

Birey A 1/2 olasılıkla 2000TL kazanacağı ve 1/2 olasılıkla 1000 TL kaybedeceği bir kumara girmeli midir? Bu sorunun bir çözümü düşünebileceğiniz gibi kazanç ve kaybı X rasgele değişkenin alabileceği değerler olarak ele alıp:

$$E(X) = \frac{1}{2}2000 - \frac{1}{2}1000 = 500\,\text{TL}$$

beklenen değerini karar vermede esas almaktır. Oyuncu bu oyunu defalarca oynama olanağına



Şekil 2.1: Birey **A**'nın paraya ilişkin fayda fonksiyonu

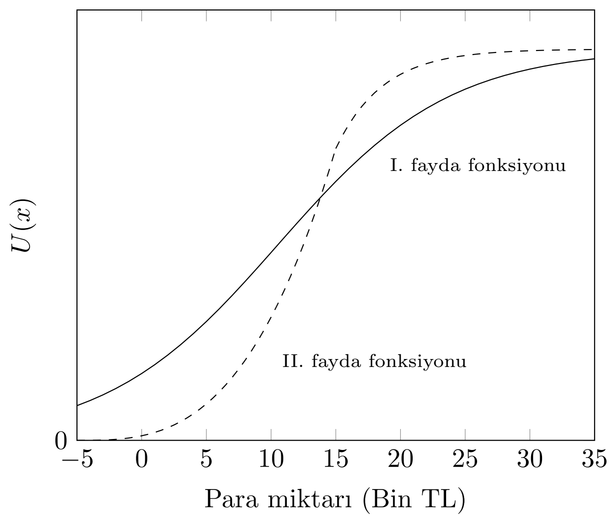
sahipse parasını $E(X) = 500$ TL kadar artırmayı bekleyebilir, beklenen değeri dikkate alarak oynamaya karar vermesi akılcı olacaktır. Parasının artması fayda fonksiyonunun (şekilden de görüldüğü gibi artan) değerini de artıracaktır. Eldeki para miktarının sınırlı olması uzun dönemli bir oyun tekrarının kendisine bu miktarda para kazandıracağı sonucunu çıkarmasına yetmez; birey var olan 8000TL birikiminin tümünü bir oyunda bile 500 TL kazanamadan kaybedebilir. Ancak birey A bir kumarbaz değilse bu oyunu belki bir kez oynayabilecektir.

Birey A oyun için karar vermede fayda fonksiyonunu da kullanabilir. Birey A, kumara girerse 1/2 olasılıkla birikimindeki parası 7000 TL olacaktır bu $U(7000) = 0.86$ faydasına sahip olması demektir; 1/2 olasılıkla birikimindeki para 10000TL olacak ve bu $U(10000) = 1.18$ faydasına sahip olmasıdır. Aslında bireyin iki seçeneği vardır: P_1 : 10000TL birikime sahip olmak, P_2 : 7000TL birikime sahip olmak . Diğer bakışla birey kendisine yapılan bir $[P_2, P_1]_{\ (1/2,\, 1/2)}$ seçeneği karşında kararını bildirmesi istemiştir. Kumar oyunu ile birey bir karma seçenekle karşı karşıyadır ve bu seçenek için fayda fonksiyonu değeri

$$\begin{aligned} U\left([P_2, P_1]_{\ (1/2,\, 1/2)}\right) &= \frac{1}{2}U\,(10000) + \frac{1}{2}U(7000) \\ &= \frac{1}{2}1.18 + \frac{1}{2}0.86 \\ &= 1.02 \end{aligned}$$

dir. Birey böyle bir seçeneğin daha önce $U(8000) = 1.0$ olan faydasından daha fazla faydası olduğunu görerek kumarı oynamaya karar verebilir. Bir kez kumar oynayacak olan birey için kumara katılmaya karar vermesinde kullanacağı uygun bir ölçüt paraya ilişkin kayıp kazancın beklenen değeri değil bu seçeneğin faydası olacaktır.

Yapılan bu değerlendirmede fayda fonksiyonun kendisinin de bir beklenen değer olduğu gerçeği unutulmamalı. Bu durumda her iki beklenen değerden faydayı değer- lendirmeye esas alıp diğerini ise çok sayıda tekrar olması halinde akılcı bir ölçüt olduğunun söylenmesi bir çelişki olduğunu düşündürmemeli (Lindgren (1971)). Fayda fonksiyonu ele alındığında da çok sayıda tekrarın varlığı



Şekil 2.2: Yüklenicinin net para kazancına ilişkin fayda fonksiyonu. Uygulama örneğinde I. fayda fonksiyonu kullanılmıştır.

söz konusudur. Burada çok sayıda tekrar, aynı tek deneyle yüz yüze kalmış aynı fayda fonksiyonuna sahip çok sayıda karar vericidir.

Örnek. Bir yüklenici (müteahhit) **A** ya da **B** işlerinden birini yüklenmek için ihale- lere katılma olanağına sahiptir. **A** ihalesine katılmak için yapacağı başvuru, teminat vb.. masraflar ona 2500 TL'ye mal olacaktır. Yüklenici ihaleyi 0.6 olasılık ile kazanabilecektir(öyle olduğunu düşünmektedir) ve bu ihaleden *net kazancı* hava koşullarının uygun olması halinde 25000 TL, aksi durumda net kazancı 15000 TL olacaktır.

B ihalesine katılmak ise ona 5000 TL'ye mal olmaktadır. Bu ihaleyi alma olasılığı ise 0.5 dir. Hava koşullarının uygun olması halinde yapacağı iş ona net 35000 TL aksi durumda 25000 TL kazandıracaktır. Havaların uygun olması olasılığı ise 0.8 dir. Yüklenicinin fayda fonksiyonunun grafiği şekilde I olarak gösterilmiştir. Yüklenici **A** ve **B** ihalelerinden hangisine hazırlanmaya karar vermelidir?

A ihalesine katılmakla yüklenicinin faydası:

$$U(k_{\mathbf{A}}) = 0.4U(-2500) + 0.6U(\mathbf{A})$$

olacaktır. Ancak $U(\mathbf{A})$ fayda değeri hava koşullarına bağlı olacaktır:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{A}) &= 0.8U(25000) + 0.2U(15000) \\ &= 0.86 \end{aligned}$$

Grafikten $U(25000) = 0.9, U(15000) = 0.7$ ve $U(-2500) = 0.05$ olduğu tespit edilebilir. Böylece $U(k_{\mathbf{A}}) = 0.4 \times 0.05 + 0.6 \times 0.86 = 0.536$ olduğu hesaplanır. Benzer olarak **B** ihalesine katılmakla yüklenicinin faydasına ilişkin olarak grafikten $U(35000) = 1.0$, $U(25000) = 0.9$ ve $U(-5000) = 0$ oldukları belirlenerek,

$$U(\mathbf{B}) = 0.8U(35000) + 0.2U(25000) = 0.98$$

hesaplanır ve

$$\begin{aligned} U(k_{\mathbf{B}}) &= 0.5U(-5000) + 0.5U(\mathbf{B}) \\ &= 0.49 \end{aligned}$$

bulunur. $U(k_{\mathbf{A}}) > U(k_{\mathbf{B}})$ olduğundan yüklenici **A** ihalesine başvuruda bulunmayı tercih etmelidir.

Çözümleme bir başka yol izlenerek de yapılabilir: **A** ve **B** ihaleleriyle sunulan seçenekler sırasıyla $[-2500, 25000, 15000\,]_{(p_1,p_2,p_3)}$, $[-5000, 35000, 25000\,]_{(r_1,r_2,r_3)}$ olan bir karma seçenekleridir. Örneğin **A** ihalesi için hava koşulları ile ihale kazanıl- masının birbirlerinden bağımsız olaylar olduğu varsayımı altında

$$p_1 = P(\text{İhale masraflarını karşılayıp ihaleyi kaybetmek}) = 0.40$$

olasılıkla yüklenici net 2500 TL kaybedecektir (ya da net kazancının -2500 TL olması).

$$\begin{aligned} p_2 &= P(\text{İhaleyi kazanıp havaların iyi gitmesi}) \\ &= 0.60 \times 0.8 \\ &= 0.48 \end{aligned}$$

olasılıkla yüklenici net 25000 TL kazanacaktır.

$$\begin{aligned} p_3 &= P(\text{İhaleyi kazanıp havaların uygun gitmemesi}) \\ &= 0.60 \times 0.2 \\ &= 0.12 \end{aligned}$$

olasılıkla yüklenici net 15000 TL kazanacaktır.

Böylelikle **A** ihalesi ile sunulanın $[-2500, 25000, 15000\,]_{(0.40,0.48,0.12)}$ olan bir karma seçenek olduğu görülür. Bu karma seçeneğin yükleniciye sağladığı net kazancın faydası

$$\begin{aligned} U(k_A) &= U(\,[-2500, 25000, 15000\,]_{(0.40,0.48,0.12)}) \\ &= 0.40U(-2500) + 0.48U(25000) + 0.12U(15000) \\ &= 0.86 \end{aligned}$$

dır. Benzer olarak **B** ihalesi ile sunulanın $[-5000, 35000, 25000\,]_{(0.50,0.40,0.10)}$ olan bir karma seçenek olduğu belirlenir ve bunun fayda fonksiyonu değeri de yine önceki çözümlemede hesaplandığı gibi $U(k_B) = 0.49$ hesaplanır. Sonuçta tekrar aynı karara varılmış olunur.

Soru. Hava koşullarının uygun olması olasılığı 0.20 olursa hangi ihale tercih edilmelidir?

Soru.Yüklenicinin fayda fonksiyonu şekilde verilen II. fayda fonksiyonu olması durumunda çözümlemeyi siz yapın.

Adil Oyunlarda Fayda Fonksiyonu:

X rasgele değişkeni sonuçları rasgele bir olguya dayalı olarak oynanan bir kumar oyununda kazanılan(ve kaybedilen) para miktarını göstersin. Eğer $E(X) = 0$ ise böyle bir kumar **adil** (fair) kumar olarak adlandırılır. Adil bir kumar ancak zevk için oynanabilir ve ne oynatan ne de oynayan kumarbazların uzun dönemde ne kazançlı ne de zararda olacakları bir oyundur . Çoğu kez gerçek bir kumar oyununda çok da az olsa -adil gibi gözükse de, adil olmadığı gizlense de - oynatan lehine bir kazanç vardır.

Yukarıdaki örnekte 8000TL birikimi olan birey A' ya aşağıdaki kumar önerisi yapılsın. Üç yüzlü dengeli ve yüzeylerine 1, 2, 3 yazılı olan zar atılacak(6 yüzlü dengeli bir zar 3 yüzlü dengeli bir zara dönüştürülebilir) ve birey A 1 atarsa 2000 TL kazanacak aksi halde 1000 TL kaybedecektir.

$$E(X) = \frac{1}{3}(2000) - \frac{2}{3}(1000) = 0$$

olduğundan önerilen kumar adildir. A'ya kumar önerisiyle sunulan $[P_1, P_2]_{(1/3,2/3)}$ seçeneğine ilişkin fayda fonksiyonu değeri (fayda fonksiyonu grafiği kullanılıarak)

$$U([P_1, P_2]_{(1/3,2/3)}) = \frac{1}{3}U(10000) + \frac{2}{3}U(7000) = 0.97$$

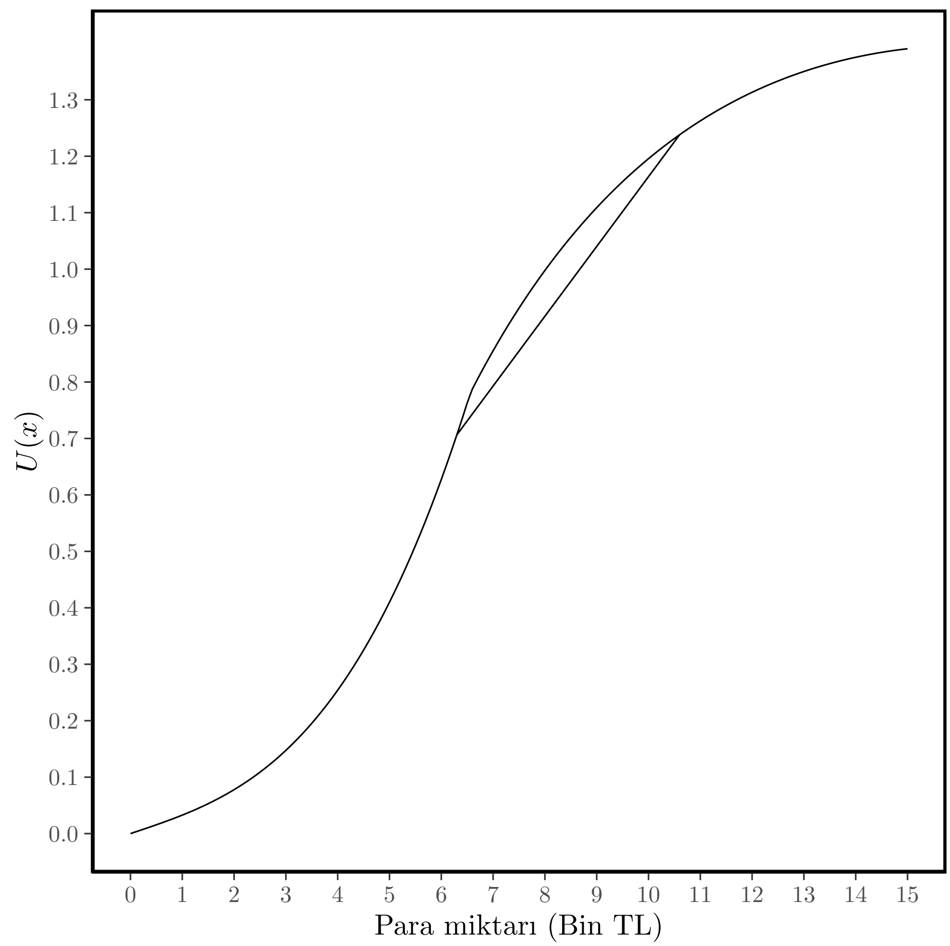
olduğu hesaplanır. Birey A nın bu oyundan sonra **birikimindeki paranın beklenen değerinin** hâlâ

$$\frac{1}{3}10000 + \frac{2}{3}7000 = 8000$$

olmaktadır. Birey A nın fayda fonksiyonu grafiği üzerinde (7000, 0.86) ve (10000,1.18) noktaları arasına çizilecek doğru parçasının tümüyle fayda fonksiyonun altında kaldığı (8000,0.97) noktasının da bu doğru parçası üzerinde bulunduğu görülecektir. Oyun adil olsa da faydası azalmıştır. Kumar adil olsa da fayda fonksiyonuna göre oyuna katılmama kararı verilebilir.

Eğer birey A' nın fayda fonksiyonu bir doğru ile ifade edilmiş olsaydı adil kumar oyunlarının tümünün A için ne kaybının de kazancının olmayacağı söylenebilirdi.

Örnek(St. Petersburg paradoksu). Bu örneğin incelenmesi özellikle paraya ilişkin fayda fonksiyonunun sınırlı olmasının (gerektiği) makul olduğunu sezmek bakımından yararlı olacağı düşünülmektedir. Bir kumarbaz hilesiz bir parayı ilk turayı gözlem- leyinceye dek atar. Tura gözlemlendiğinde oyun biter ve kumarbaz ilk turayı gözle- yinceye kadar yapılan rasgele atış sayısı N geometrik dağılımlı rasgele değişken olmak üzere $X = 2^N$ Kuruş (kr.) kazanacaktır. Kumarbaz oyuna girmek için



Şekil 2.3: Birey **A**'nın paraya ilişkin fayda fonksiyonu ve adil kumar

kumar oynatıcıya ne kadar başlangıç parası verirse oyun adil olur sorusuna cevap aranacaktır. N rasgele değişkeninin dağılımı $p = 1/2$ olmak üzere

$$P(N = i) = \begin{cases} p(1-p)^{i-1} & i = 1, 2, 3 \cdots \\ 0 & \text{d.y.} \end{cases}$$

dir. Kazanılan para rasgele değişkeni $X = 2^N$' ye ait dağılım

$$P(X = 2) = P(N = 1), P(X = 4) = P(N = 2), P(X = 8) = P(N = 3), \cdots$$

olarak edilecektir. Böylelikle X' e ait beklenen değerin

$$\begin{aligned} E(X) &= \textstyle\sum_x xP(X = x) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} 2^i P(N = i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} 2^i \frac{1}{2^i} \\ &= \infty \end{aligned}$$

olduğu görülür. Oyuna katılacak kumarbazın beklenen kazancı ∞ dur! Bu nedenle oyunun adil olması ancak kumarbazın ∞ (!) kr. ile oyuna girmesi ile olanaklıdır. O halde oyunu adil yapacak büyüklükte para bulamayız. Buna karşın bir kumarbaz bu oyuna katılmak için deyim yerindeyse 5 kr. bile vermeyecektir. Sınırsız para kazanılabilecek bir oyuna sınırlı bir miktarda para vererek katılmamak, paradoks budur. Çünkü ilk atışta tura gözlemleme olasılığı 1/2 dir!

Oyuna sınırlama konulup adil yapılabilir. Diyelimki kumar oynatıcısı 2^{25}kr. (ya da 335 bin 544 TL 32 kr.) paraya sahiptir, oyunu pu parayla sınırlayacaktır. Kazanılacak para $X < 2^{25}$ kr. olabildikçe oyun sürecektir. Eğer $X \geq 2^{25}$ ise o zamana kadar 24 kez para atışı yapılmış ve oyun 25. atışa kalmış alcaktır. Bu durumda 25. atışta tura gözlense de gözlenmese de kumarbaz 2^{25}kr. kazanacaktır. Bu oyunun kazancı olan para miktarı rasgele değişkeni diğerinden ayırdetmek için bu kez Y ile gösterelim. $E(Y)$ beklenen kazancını hesaplamak için

$$P(Y=2)=P(X=2)=\frac{1}{2},\cdots,P(Y=2^{24})=P(X=2^{24})=P(N=24)=\frac{1}{2^{24}}$$

ve $P(Y=2^{25})=P(X\geq 2^{25})=P(N\geq 25)=(\frac{1}{2^{24}})\sum_{i=1}^{\infty}1/2^i$ olduğu dikkate alınarak $E(Y)=2(1/2)+4(1/4)+\cdots+2^{24}(1/2^{24})+2^{25}(1/2^{24})=26$ kr. olarak hesaplanır. O halde bu durumda **kumarbazın beklenen kazancı** bakımından bu kumara 26 kr. tan daha fazla ödenmemeli. Kumarbazın kararını hasasiyetle oluşturmak için de kumarbazın para için fayda fonksiyonunun bilinmesi gerekir.

Problemin ilk hali dikkate alındığında birey A'nın fayda fonksiyonunun sınırsız olup olmadığı merak edilecek olursa bu problemdeki paradoks bir cevap olacaktır. Diyelim ki verilen herhangi bir para miktarı 7654 kr. için birey $U(P)>7654$ olacak bir P karma seçeneği bulabilecek midir? Cevap daha önceden de bildiğimizce hayır olacaktır, çünkü bundan daha iyi olanı da vardır. Diyelimki böyle bir karma seçenek vadır. Karmayı oluşturacak $P_1,P_2,\cdots$ seçenekleri için de $i=1,2,\cdots U(P_i)\geq 2^i$ dir. Bu durumda

$$U(P)\geq 2(1/2)+4(1/4)+(1/8)8+\cdots=\infty$$

olacaktır. Bu ise olanaksızdır P bir **seçenektir** faydası da sınırlı olmalıdır.

Kaynaklar

[1] H. Chernoff and L. E. Moses (1986), *Dover Publications*, New York.

[2] B. W. Lindgren (1971), Elements of Decision Theory, *Macmillan Company*, New York.