İST 304 İstatistik Karar Kuramı ve Yöntemleri **Hafta IV**

Ders 1 : Fayda Fonksiyonu ve İstatistik: Dağılım Parametreleri

Dersi anlatan: İhsan Karabulut *Notları yazan: İhsan Karabulut*

Not: *LaTeX ders kalıbı UC Berkeley EECS Bölümü'nündür.*

Buraya kadar ki incelemede karma bir seçeneğe ilişkin fayda fonksiyonu değerini seçeneğe ilişkin olasılık dağılımının belirlediği-bu sade seçenekler için ise 0 yada 1 olasılıkla- görüldü. Olasılık dağılımının bilinmesi sadece dağılımın şeklinin bilinmesi (ait olduğu dağılımların kümesinin ya da ailesinin) değil dağılım ailesine ait **dağılımın parametresinin** de bilinmesi anlamına gelecektir. Örneğin St. Petersburg paradoksu anlatılırken söz konusu dağılım ailesi geometrik dağılımdı ve dağılım pek çok özelliğiyle bilinmektedir. Paranın hilesiz olduğunu söylemekle parametresinin de $p = 1/2$ olduğu anlaşılmış olmalıdır. O halde faydanın değeri bu anlamda parametreye de bağlıdır. Fayda kuramı kapsamında dağılımın bağlı olduğu parametresi **betimsel parametre**(descriptive parameter) olarak adlandırılır(Chernoff ve Moses) ancak burada sadece parametre olarak adlandırılacaktır. İstatistiksel tahmin ve çıkarımla karar kuramının temasta olduğu bu nokta üzerinde birkaç örnek ile durulması henüz erken olsa da yerinde olacaktır.

Aşağıdaki örneklerde **fayda fonksiyonu** terimi yerine istatistikte daha çok kullanılan ve istatistikteki anlamıyla da örtüşen **kayıp fonksiyonu** terimi kullanılacak- tır. Faydayı en çok yapmanın kaybı en az yapmak olduğu düşünülürse bu kullanımın fayda fonksiyonu kavramında bir anlam değişikliğine yol açmayacağı anlaşılır.

Örnek(Atışta hedefi vurma). Atıcılığa hevesli Ahmet Bey'in bir tüfek koleksiyonu vardır ve kolleksiyondakilerin bazıları onun tercih ettikleri tüfeklerdir. Bunlardan birisi de onun gözdesidir ve tüfek hedeflenen noktadan biraz sapma eğilimindedir. Ahmet Bey bunu bildiği için silahın bu yanlılığını (bias) telafi edebilmektedir.

Ele alınacak problem daha karmaşık olmasın diye tüfekteki dikey sapmaların olmadığı (veya ihmal edilebileceği) sapmaların sadece hedefin sağından ve solundan hedef merkezine olan uzaklığı ile ölçüldüğü düşünülsün. X rasgele değişkenin aldığı değerler hedeften sapan uzaklıklardır; negatif değerler hedefin soluna düşen atışın hedeften uzaklıkları, pozitif değerler hedefin sağına düşen atışın hedeften uzaklıkları göstersin. Atıcı Ahmet Bey'in X r.d. nin dağılımını bildiği varsayılsın.

Ahmet Bey tüfeği ile tam hedefe nişan aldığında tüfek hedefin sağında bir yeri vurmaktadır. a birim sağına nişan almaktadır. Atılan mermi de hedefi X uzaklığında vuracağına $Y = X + a$ uzağından vuracaktır. Atıcı 0(hedefe uzaklık) yerine Yyi vurduğunda(0 'a Y uzaklıkta bir yeri vurduğunda) **kaybedeceği fayda miktarının**

$$\ell(Y) = 2.3Y^2$$

olacağını düşünmektedir.

Ahmet Bey hedef noktası olarak 'a' yı seçmekle X rasgele değişkeninin a kadar ötelenmesiyle tanımlanan bir Y rasgele değişkeni(r.d.) için bir olasılık dağılımını da belirlemiş olmaktadır. Bu r.d. için kaybedilen fayda miktarının beklenen değeri

$$E(\ell(Y)) = 2.3E((X + a)^2)$$

$E((X+a)^2) = L(a)$ olarak tanımlansın. Ahmet Bey $L(a)$ yı enaz(minimum) yapacak bir a noktasını hedef almalıdır ki kaybın beklenen değeri az olsun. O halde a ne olmalıdır? Soru aşağıdaki gibi cevaplandırılacaktır.

Lemma. $a \in R$ bir sabit ve X, $E(X^2) < \infty$ olan bir r.d. olmak üzere, $E(X-a)^2$ yi enaz (minimum) yapacak a değeri $E(X) = \mu$ dür.

Diğer anlatımla X r.d. nin **kestirimleri** içinde hata kareler ortalaması(HKO yada yaygın olarak MSE kısaltması ile gösterilir) en küçük olan kestirim $E(X) = \mu$ dür.

O halde

$$\begin{aligned} L(a) &= 2.3E(X + a)^2 \\ &= 2.3E(X - \mu)^2 + (\mu + a)^2 \end{aligned}$$

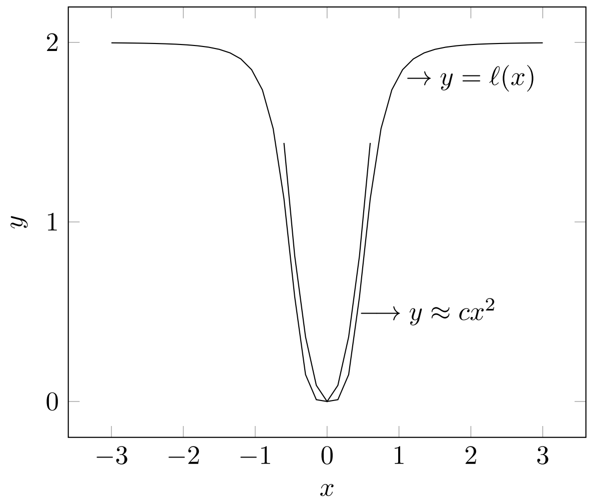
olup bu da en az $E(X - \mu)^2$ olabilir ki bu $a = -\mu$ seçilmesiyle olanaklıdır. Bu durumda en az kayıp $L(\mu) = 2.3\sigma^2$olur.

Atıcının kolleksiyonunda diğer tüfekler de vardır. Bunlar arasından bir seçim yapacak olduğunda seçimini hangi temele göre yapması gerektiği de açıktır: Sapması en küçük σ^2 sahip tüfeği seçmelidir.

Atıcının kaybını gösteren fonksiyon, üzerinde durulması gerekli bir başka noktadır. l fonksiyonu yatay x ekseni altında değer almayıp ancak $x = 0$ olduğunda bu eksene değen *düzgün* bir eğriyi göstersin l nin en küçük olduğu yerde eğri mercek altına alınırsa bu küçük bölgede eğri doğruya yakın gözükecektir, bu eğrisel bir yüzeye sahip yerkürenin bir kesitinin dümdüzmüş gibi görülmesine benzetilebilir. Elbetteki bir doğru değildir ancak eğrinin bu küçük kesiti daha karmaşık olan l fonksiyonu yerine çalışılması görece daha basit ve anlamlandırılabilmesi(yorumlanması) kolay olacak bir parabol ile temsil edilebilir. Yani üzerinde çalışılması zor olan bir l fonksiyonuna bazı koşullar altında $x = 0$ civarında $c > 0$ olan bir sabit olmak üzere $y = cx^2$ gibi bir fonksiyon ile yaklaşımda(approximation) bulunulabilir.

Hedefe çok uzak olmayan atışlar için l kaybına cY^2 ile yaklaşımda bulunmak l kaybına oldukça yakın sonuçlar verecektir. "Yaklaşımın beklenen değerini en az yapma en iyi eylemin (yapılan seçimin sonucu olarak) seçimine bir yaklaşım olacaktır."

Bu problem ile bir istatistik problemi olan bir dağılımın bilinmeyen parametresinin tahmini ile benzerlik gösterir. Çoklukla bilinmeyen θ parametresi bir rasgele değişken olan T *istatistiğine* dayalı olarak tahmin edilmek istenir. Bu istatistiğin *iyiliği* nin bir ölçüsü pek çok durumda kaybın



Şekil 1.1: İyi tanımlı $\ell(x)$ fayda fonksiyonuna $x = 0$ civarında cx^2parabolü ile yaklaşımda bulunulması.

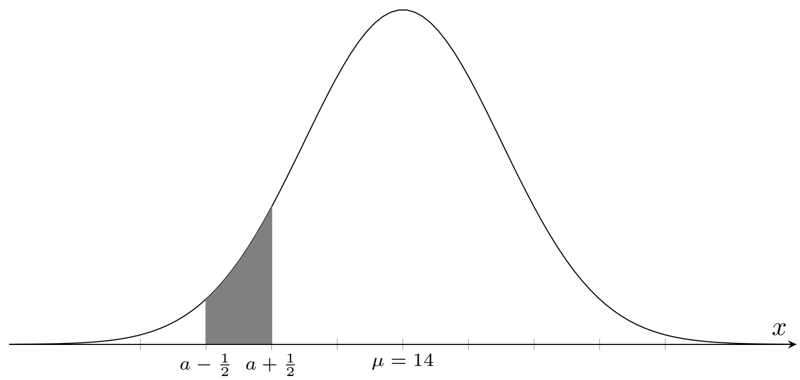
beklenen değeri genellikle bir $cE(T - \theta)^2$ile saptanmaya çalışılır.

Örnek(Mağaza konumunun belirlenmesi). üzerinde çeşitli yerleşim birimlerinin bulunduğu bir karayolu üzerinde ev eşyaları satan bir mağaza açılmak istenmektedir. Gelecekte müşterisi olabilecek insanların evlerinin bu karayolu üzerindeki konumları(örneğin 5. kilometre vs..) X bir rasgele değişken olarak kabul edilmektedir. Yükleme ve boşaltma masraflarının sabit olduğu kabul edilerek verilen siparişler için ana maliyetin taşıma masrafı, yolda harcanan zaman olduğu ve bunun a. uzaklıkta konumlanmış mağaza için $X - a$ ile orantılı olduğu düşünülmektedir. Eğer işletmeci- nin faydasının müşterisine toplam uzaklığın azalan bir fonksiyonu olduğu varsayılırsa işletmeci

$$E\,|X - a|$$

beklenen değerini enaz(minimum) yapacak a yı belirlemelidir. Aşağıdaki sonuç bununla ilgilidir.

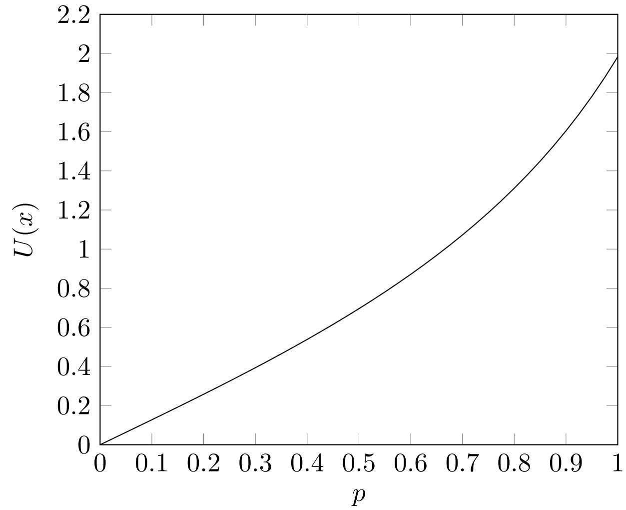
Lemma. $a \in R$ bir sabit X, $E\,|X| < \infty$ (yani $E(X)$var ve sonlu) ve m ortanca(medyan) değerine sahip bir rasgele değişken olsun. Mutlak hatanın beklenen değerini en küçük yapan kestirim $a = m$ dir; $E\,|X - m| \leq E\,|X - a|$ dır.



Şekil 1.2: Ayakkabı numarası X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu.

Örnek(Ayakkabı ustası). Erdal usta ayakkabı ustasıdır ve uzun yıllardan sonra banka kredisi kullanarak kendisine ait bir ayakkabı üretim işletmesi açmıştır. Ancak başlangıçta eski bir makine almak zorunda kalmıştır. Bu makinede belirlenen bir numarada ayakkabı üretimi için ayar yapıldığında bir başka numarada ayakkabı üretimi için yeniden ayar gerektirmekte bu hem haftalar gerektirmekte dolayısıyla üretimde gecikme maliyetini yükseltmekte, hem de ayar makine için yeni parçalar gerektirmektedir. Ayrıca alınan kredinin ödenebilmesi için ürettiği ayakkabıların çokça satılabilir olması istenmektedir. Bu nedenlerle Erdal Usta'nın fayda fonksiyonu - en azından kredi taksitlerinin ödemeleri bitinceye kadar olan zaman diliminde - satacağı ayakkabı sayısının artan fonksiyonudur diyelim. Erdal usta öyle bir ayakkabı numarası belirlemelidir ki dükkanına giren müşterilerin pek çoğuna bu numaradaki üretilmiş ayakkabılarını satabilsin.Toplumda ayakkabı numaralarının dağılımının aşağıdaki gibi olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olan bir X rasgele değişken olduğu varsayılsın.

Amaç en yüksek satılma olasılığına sahip ayakkabı numarasını belirlemek olacaktır. Bu da en büyük $P(a - 1/2 < X \leq a + 1/2)$ olasılığını verecek a değerini, yani dağılımın **tepedeğer**ini (**mod**unu) bulmak olacaktır. Aşağıda Erdal Usta'nın fayda fonksiyonu verilmiş olup, bu çizimde U fayda fonksiyonu dükkanına giren bir müşterinin ayağına uygun numarada ayakkabı bulması olasılığının bir fonksiyonu olarak tanımlıdır.



Şekil 1.3: Ayakkabı ustasının ürettiği numarada ayakkabının rasgele bir müşterinin ayağına uyması olasılığı p nin bir fonksiyonu olarak ayakkabı ustasının fayda fonksiyonu.

Ayakkabı numarası rasgele değişkeninin yukarıda verilen olasılık yoğunluk fonksiyonun $X \sim N(14,\, 2.25)$ dağılımlı olduğunu varsayılsın. Bu bilgiler kullanılarak 13, 14 ve 15 numaralardan birinde karar kıldığında faydası hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} P(12.5 < X \leq 13.5) &= P(-1 < Z \leq -1/3) \\ &= 0.21 \end{aligned}$$

Fayda fonksiyonunu kullanarak bu olasılığın fayda fonksiyonu değeri $U(0.21) = 0.27$ olarak hesaplanır. Benzer olarak $P(13.5 < X \leq 14.5) = 0.26$ ve $U(0.26) = 0.33$; $P(14.5 < X \leq 15.5) = 0.21$ ve $U(0.21) = 0.27$ olduğu hesaplanabilir (fonksiyon grafiği kullanılarak belirlenebilir).

Soru. Söz konusu fayda fonksiyonunu ayakkabı numaralarının bir fonksiyonu olarak oluşturabilir mi?

İST 304 İstatistik Karar Kuramı ve Yöntemleri **Hafta IV**

Ders 2 : R^n'de Doğrular- Düzlemler

Dersi anlatan: İhsan Karabulut *Notları yazan: İhsan Karabulut*

Karar vermeyi iyi tanımlanmış bir matematiksel model çerçevesinde yapabilmeyi öğrenmek bu dersin en önemli amaçlarından biridir. Bu derste matematiksel işlem ve hesaplama ön planda tutulmamış olsa da kullanılacak kavram ve tanımlamaların matematikteki karşılığına ihtiyaç duyulacaktır; bu ihtiyacın kendisini duyumsattığı önceki derslerde görülmüş oldu. Analitik çözümlere ulaşmak için çoğu kez hesaplama ve bir takım tekniklere ihtiyaç duyulur. Hesaplama ve tekniklerin ön plana çıkması ise bu dersi amaçlarından saptıracaktır. Bunun yerine konunun hesaplama yönünü basit tutup kavramları öne çıkarmak uygun bir düşünce gibi gözükmektedir. Hesaplama ve çözümlemelerin R^2 ve R^3'de görsel olarak yapılması daha kolaydır. Ders konuları R^2 ve R^3'ün pek dışına taşmayacak şekilde verilecektir. Ancak unutulmamalı ki karar kuramının ilgileneceği problemlerde böyle bir kısıtlama yoktur. Verilecek kavram ve tanımlamalar da boyut ne olursa olsun geçerlidir. R^2 ve R^3'de doğru ve düzlem kavramlarının dışına çıkmadan bazı kavram ve tanımlar hatırlatılacaktır. Bunlar hakkında [4]'de 1.4 ve 2.1, 2.2 alt başlıkları altında yeterli bilgi vardır.

Gösterim Uyarısı: Bundan sonraki vektör gösterimlerinde örneğin R^2'de sütun vektörü

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

yanlış anlaşılmadıkça çok yer kaplamaması düşüncesiyle (x, y) olarak da yazılacaktır.

Burada hatırlatılacak konular içinde unutulmaması gereken en önemli bir kavram örneğin R^3 deki her $x' = (x_1, x_2, x_3)$ noktasının $(0, 0, 0)$ başlangıç noktasından bu noktaya bir vektörü tanımladığıdır. Bir I doğrusuna paralel ve sıfırdan farklı bir vektöre *bu doğrunun bir doğrultman vektörü* denir, bir doğrunun birçok doğrultman vektörü vardır. Bir noktası ve doğrultman vektörü verilen doğru uzayda tek olarak belirlemiş olur. Uzayda bir $A' = (a_1, a_2, a_3)$ noktasından geçen ve sıfırdan farklı bir $u' = (u_1, u_2, u_3)$ vektörüne paralel bir tek doğru vardır. Dik koordinat sistemi, uzaydaki $P' = (p_1, p_2, p_3)$ ile gösterilebilecek herhangi bir P noktasını $Y' = (y_1, y_2, y_3)$ gibi sistemin bileşenlerine dönüştüren bir fonksiyondur :

$$Y'(P) = (y(p_1), y(p_2), y(p_3)) = (y_1, y_2, y_3).$$

Bundan sonra R^n'de özel olarak R^2 ve R^3'de dik koordinat sisteminde herhangi bir P noktası $Y' = (y_1, y_2)$ ve $Y' = (y_1, y_2, y_3)$ ile gösterilecektir. Aşağıda aynı boyutlu C ve D gibi herhangi iki vektör için $(\overrightarrow{CD})'$ gösterimi $D' - C'$ vektör farkını gösterecektir.

Verilen herhangi bir $P' = (p_1, p_2, p_3) = (y_1, y_2, y_3)$ noktasının $A' = (a_1, a_2, a_3)$ noktasından geçen ve $u' = (u_1, u_2, u_3)$ vektörüne parelel olan doğrunun üzerinde yer alması için gerek ve yeter koşul $(\overrightarrow{AY})' = (y_1 - a_1, y_2 - a_2, y_3 - a_3)$ olmak üzere

$$\overrightarrow{AY} = wu$$

olacak en az bir $w \in R$'nin var olmasıdır. Yukarıdaki ifade $Y - A = wu$ ya da $Y = A + wu$ olarak yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} y_1 - a_1 \\ y_2 - a_2 \\ y_3 - a_3 \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

ifadesinden

$$\frac{y_1 - a_1}{u_1} = \frac{y_2 - a_2}{u_2} = \frac{y_3 - a_3}{u_3} = w$$

olduğu görülür. Doğrunun tek A noktası yerine yine doğru üzerinde bulunan ve A noktasından farklı B noktası da verilirse doğrultman vektörüne gerek olmayacaktır. Çünkü $\overrightarrow{AB} = B - A$ vektörü de u doğrultman vektörü gibi bu doğrunun bir doğrultman vektörü olacaktır. Bu durumda verilen bir $Y' = (y_1, y_2, y_3)$ noktasının A ve B gibi farklı iki nokta üzerinden geçen doğrunun üzerinde yer alması için gerekli ve yeterli koşul şöyle yazılacaktır: $\overrightarrow{AY} = wu$ ifadesinin yerine $\overrightarrow{AY} = w\overrightarrow{AB}$

yazılabilecektir. Daha açık bir ifadeyle $Y = A + w\,(B - A)$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{bmatrix}$$

olacaktır. Gerekli ve yeterli koşulun öncekine benzer olduğu

$$\frac{y_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{y_3 - a_3}{b_3 - a_3} = w$$

görülür.

Derste daha sıkça karşılaşılacak R^2'de değişken bir (x, y) noktasının (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçen doğrunun üzerinde olması için bir $w \in R$ var olması gerekli ve yeterli koşulu kullanılarak doğrunun ifadesi ve doğru üzerindeki noktaların kümesi aşağıda verilecektir. Bunun için aşağıdaki şekilde verilmiş çizim kullanılacaktır. Bu çizim doğrunun bir başka ifadesinin elde edilmesinde de kullanılacaktır. Doğru üzerine yer alan iki nokta(vektör) sırasıyla $A = (x_0, y_0)$ ve $B = (x_1, y_1)$, üzerinde yer alıp almadığı araştırılan herhangi bir nokta $C = (x, y)$ olarak gösterilmiştir.

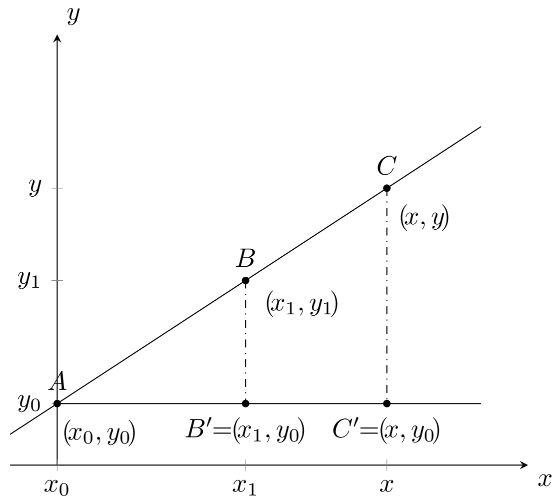
$\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$ olacağından

$\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix}$ olacak ve

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix}$$

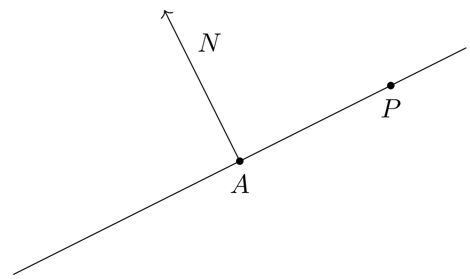


Şekil 2.4: R^2'de $A = (x_0, y_0)$ ve $B = (x_1, y_1)$ noktalarından geçen doğru ve bu doğru üzerinde yer alan herhangi bir $C = (x, y)$ noktası

olarak yazılabilecektir. Son yazılan yeniden düzenlenirse bir başka gösterim elde edilir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - w \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= (1 - w) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Elde edilen doğru denklemine *doğrunun parametrik denklemi* denilir. A ve B vektörlerinin katsayıları olan $w \in R$ ve $1 - w \in R$ için $w + (1 - w) = 1$ olduğu gözlenmektedir. $w \in R$ değiştikçe doğru üzerinde yer alan (x, y) vektörü de değişmektedir. Bu nedenle doğrunun parametrik denklemi ile doğru üzerindeki tüm noktaların kümesi aşağıdaki gibi yazılabilecektir. (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçen doğrunun üzerinde yer alan tüm noktaların kümesi:



Şekil 2.5: Doğru ve A noktasında normali

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1-w) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \ w \in R \right\}$$

dir.

Parametrik denklemde $w \in R$ yerine $0 \leq w \leq 1$ kısıtlaması konulursa bu kez $w \in [0,1]$ için w değeri değiştikçe A ve B noktalarından geçen doğru üzerindeki noktalar da bu doğru boyunca A ve B uç noktaları arasında kayar. Bu A, B noktalarının uç noktaları olduğu AB *doğru parçasının* üzerinde yer alan noktaların kümesini verir.

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1-w) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \ 0 \leq w \leq 1 \right\}$$

Doğru parçasının parametrik denkleminden şu gözlem de yapılabilir: (x, y) noktasının konumu w değeri 1'e yaklaştıkça (x_1, y_1) noktasına yaklaşır; w değeri 0'a yaklaştıkça (x_0, y_0) noktasına yaklaşır. Ayrıca (x, y) noktalarının herbiri bizim de bildik olduğumuz (x_0, y_0), (x_1, y_1) noktalarının sırasıyla $1 - w$ ve w ile ağırlıklandırılmış "aritmetik ortalamasını" verir.

R^2 düzleminde (genel olarak R^n'de) doğrunun elde edilmesinin bir diğer yolu da şudur: Bir A noktasından geçen ve her bileşeni sıfır olmayan bir N vektörüne dik bir ve yalnız bir doğrunun elde edilebilir.

Düzlemde herhangi bir P noktasının anılan doğrunun üzerinde bulunması için gerek ve yeter koşul

$\left\langle N, \overrightarrow{AP} \right\rangle = 0$ yada $\overrightarrow{AP} = P - A$olduğunu kullanarak $\langle N, P - A\rangle = 0$ olmasıdır. İç çarpımın özelliği kullanılarak $\langle N, P\rangle - \langle N, A\rangle = 0$ olarak yazılabilir. N, A verildiğinden $-\langle N, A\rangle = c$ sabit olacak ve doğru $\langle N, P\rangle + c = 0$ yazılabilecektir. Düzlemde (x, y) dik koordinat sistemi Yile gösterilirse, $P = (p_1, p_2)$ noktası dik koordinat sisteminde $Y(P) = (x, y)$ olacaktır. O halde $N = (n_1, n_2)$ ve herhangi bir nokta P (x, y) ile gösterilirse $\langle N, P\rangle + c = 0$ yerine

$$\left\langle \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle + c = 0$$

yazılabilir.Bu şekilde elde edilecek doğru denklemi x ve y bileşenleri arasındaki ilgiyi de göstermektedir.

Bazı durumlarda doğruya dik normal vektörü belirlemek yerine, doğru üzerinde A noktasından farklı bir başka B noktası da alınarak bu ilgiyi ortaya koyacak doğru denklemi elde edilebilir. Yukarıda A, B ve değişken Cnoktasının yer aldığı şekil bu amaçla tekrar kullanılacaktır. Bu çizimde yer alan CAC' ile BAB' üçgenlerinin benzerliği bu ilginin kurulmasına yardımcı olacaktır. Yapılan çizimde oluşan bu üçgenlerin ilgili açıları birbirlerine eşittir. Bütün karşılıklı açıları eşit olan üçgenler benzer üçgenlerdir(aksiyom-postulat, ss.182 Ess. of Geometry, Lial,Steffensen,Johnson(1990)) Bu nedenle ilgili kenar uzunlukları da orantılıdırlar. Aşağıda AB gösterimi bu doğru parçasının uzunluğunu göstermek üzere kenar uzunluklarının bir orantısı

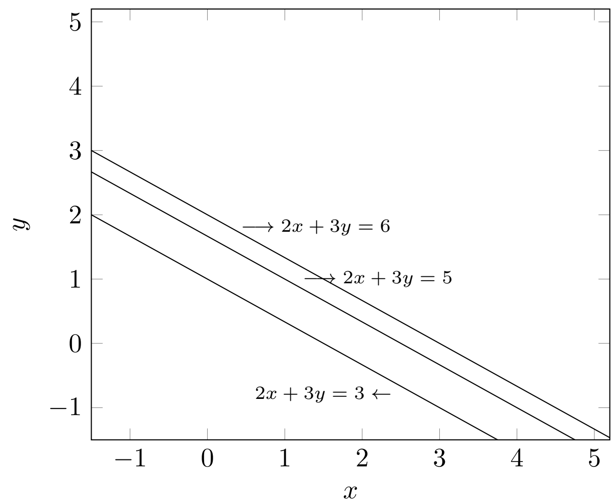
$$\frac{AC'}{AB'} = \frac{CC'}{BB'} = \frac{AC}{AB}$$

dır. Benzer üçgenlerin benzer kenarları arasındaki oranlar da (yukarıdaki orantının bir özelliği olarak da)orantılı olup

$$\frac{BB'}{AB'} = \frac{CC'}{AC'}$$

yazılabilir. Uzunluklar $BB' = y_1 - y_0$, $CC' = y - y_0$, $AB' = x_1 - x_0$, $AC' = x - x_0$ olduğundan bu orantı

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$



Şekil 2.6: $2x + 3y = 3$, $2x + 3y = 5$ ve $2x + 3y = 6$ doğrularının R^2'de çizimi

yazılır. Orantının her iki tarafı $(x_1 - x_0)(x - x_0)$ ile çarpılıp oranlarındaki paydalar elenir ve

$$(x - x_0)(y_1 - y_0) = (y - y_0)(x_1 - x_0)$$

yazılabilir. Sonuçta $x(y_1 - y_0) + y(x_0 - x_1) = x_0y_1 - y_0x_1$ eşitliğinde verilenlerle oluşturulan $(y_1 - y_0)$, $(x_0 - x_1)$ ve $x_0y_1 - y_0x_1$ sırasıyla a, b ve c olarak tanımlandıklarında $x(y_1 - y_0) + y(x_0 - x_1) = x_0y_1 - y_0x_1$ eşitliği

$$ax + by = c$$

biçiminde tekrar yazılır.

Doğru üzerindeki noktalar bu kez $\{(x, y) : ax + by = c\}$ kümesiyle ifade edilmiş olacaktır. a ve b sabitlerinin her ikisi birden sıfır olmadıkça bu noktaların kümesi bir doğruyu verecektir.

Örnek. R^2'de $f(x, y) = 2x + 3y$ fonksiyonu ile tanımlanmış bütün (x, y) noktalarının kümesini ele alalım. $f(x, y) = 5$ olan noktaların kümesi bir doğru tanımlar. $f(x, y) > 5$ olan noktalar bu doğrunun üst tarafındaki; $f(x, y) < 5$ olan noktalar ise alt tarafındaki nokta kümelerinin elemanlardırlar. Ayrıca a, b katsayılar 2 ile çarpıldığında $4x + 6y = 10$ ile tanımlı doğrunun değişmediğini gözlemlenebilir. c değeri değiştikçe de doğru R^2'de önceki konumuna paralel olarak yer değiştirir. Bu örnekte de c arttıkça doğru kendine paralel olarak daha yukarıda c azaldıkça doğru yine kendine paralel olarak daha aşağıda konumlanmaktadır.

Örnek. R^2'de $(2,2)$ ve $(6,1)$ noktalarından geçen doğrunun çizimi yapılacaktır (vektör notasyonu yer kazanmak amacıyla kullanılmadı). Doğru

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$

orantısı kullanılıp bilinen doğrusal fonksiyon $y=5/2-(1/4)x$ elde edilerek aşağıdaki şekilde verilen çizimi yapılabilir. Diğer taraftan

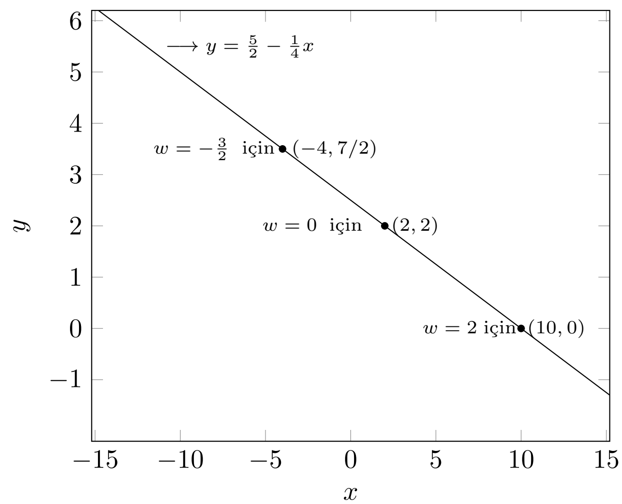
$$\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1-w)\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, w \in R\right\}$$

noktalar kümesi de bu doğruyu tanımlar. Her $w \in R$ için elde edilecek vektör(nokta) bu kümenin bir elamanı olacaktır. Örneğin, $w=2$, $w=0$ ve $w=-3/2$ için sırasıyla $(10,0)$, $(2,2)$ ve $(-4,7/2)$ noktaları bu kümenin elemanlarıdırlar.

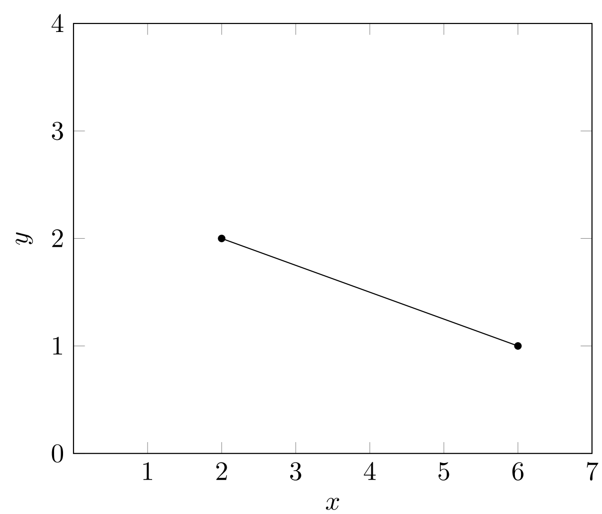
Sadece bu iki noktayı birleştiren *doğru parçasının* betimlenmesi istenseydi bu doğruyu betimleyen yukarıdaki küme yerine $w \in [0,1]$ kısıtlaması ile

$$\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1-w)\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, 0 \leq w \leq 1\right\}$$

kümesini yazmak yeterli olacaktır. Bu doğru parçasının çizimi de yine aşağıdaki şekilde verilmiştir. Görülebileceği gibi w değeri 1'e yaklaştıkça ağırlık merkezi $(6,1)$ noktasına doğru; sıfıra yaklaştıkça $(2,2)$ noktasına kayacaktır. Doğru parçasını betimleyen kümenin $(2,2)$ ile $(6,1)$ noktalarının bütün konveks kombinasyonları da bu küme içinde olduğu bu nedenle konveks bir küme olduğuna bir sonraki alt başlıkta değinilecektir.



Şekil 2.7: $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1-w) \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, w \in R \right\}$ kümesinin tanımladığı doğru.



Şekil 2.8: $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1-w) \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, w \in [0, 1] \right\}$ kümesinin tanımladığı doğru parçası.

Doğruların eğimleri de doğrular hakkında bilgi verir. Bir doğrunun $ax+by=c$ olarak gösteriminde $b=0$ olduğunda $ax=c$ bir dikey doğru($x=c/a$ ile belirlenen), $a=0$ olduğunda ise $by=c$, $y=c/b$ ile belirlenebilen bir yatay doğruyu gösterecektir. Doğru dikey olmadığında, yani $b \neq 0$ olduğunda doğrunun bir gösterimi de bilinen

$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{a}{b}\right)x + \frac{c}{b} \\ &= mx + e \end{aligned}$$

doğrusal fonksiyon formunda olacaktır. a negatif b pozitif olduğunda veya tam tersi bir durumda m pozitif olacak , eğer a, b aynı işarete sahip iseler m negatif olacaktır. m doğrunun eğimidir.

Kaynaklar

[1] D. Blackwell and M.A. Girshick (1979), Theory of games and statistical decisions, *Dover Publications*, New York.

[2] H. Chernoff and L. E. Moses (1986), Elementary Decision Theory, *Dover Publications*, New York.

[3] B. W. Lindgren (1971), Elements of Decision Theory, *Macmillan Company*, New York.

[4] A. Sabuncuoğlu (2004?), Analitik Geometri, 2. Baskı, *Nobel Yayınları* , Ankara?