İST 304 İstatistik Karar Kuramı ve Yöntemleri **Hafta VI**

Ders 1 : Doğa Durumlarının Belirsizliği Altında Karar Verme I

Dersi anlatan: İhsan Karabulut *Notları yazan: İhsan Karabulut*

Buraya kadar bir karar probleminde tanımlanmış fayda fonksiyonu kullanılarak, sade ya da karma eylemlerin fayda fonksiyonu değerleri dikkate alınarak karar verme konusu ele alındı. Karar problemin tanımlandığı doğa durumu değişmez olarak düşünülmüş ve fayda fonksiyonu da bu koşullar altında tanımlanmıştı. Verilen sade ya da karma seçeneklerin *fayda fonksiyonu değerleri sıralanarak* hangi eyleme karar verileceği belirlenebiliyordu. Fayda fonksiyonunun değer aldığı reel sayılar kümesi üzerinde doğal bir sıralama yaparak faydayı en büyük(ya da kaybı en küçük) olan eylem ya da eylemleri belirlemek yeterliydi. Böyle bir karar verme durumunda ilginçlik yok denecek kadar azdır. Karar vericileri zorlayacak durum bilinen değişik doğa durumları altında fakat hangi doğa durumu altında bulunulacağı önceden bilinmeksizin karar vermenin gerekli olduğu karar verme problemleridir. Başlıkta yer alan *belirsizlik* sözcüğü bu durumu ifade etmektedir.

Bu bölümde birden fazla doğa durumu bulunan fakat hangi durum altında bulunulacağı önceden bilinmeyen karar problemleri incelenecektir. Bu karar problemlerinin çözümlenmesinde benimsenebilecek *minimaks* ve *Bayesgil* temel yaklaşım- larının kullanımı örneklerle gösterilecektir. Minimaks ve Bayesgil yaklaşımlarının özellikleri karar kuramının önemli kavramları açısından karşılaştırılmasına yer verilecektir. Önemli bir karar kuramı kavramı olan *kabul edilebilirlik* (admisibility) ele alınacak konular arasındadır.

Bu bölümde bir karar problemi üç unsurun bir araya gelmesiyle ifade edilecektir, diğer bir ifadeyle bu unsurların belirlendiği her problem bir karar problemi olarak ele alınacaktır. Bunlar, doğanın durumlarının kümesi, seçeneklerin yada yapılabilecek eylemlerin kümesi ve her doğa durumunda tanımlı kayıp fonksiyonudur. Doğa durumları θ, problemdeki doğa durumlarının tümünü içeren küme de Θ ile gösterilecektir. Bu derste doğa durumlarının sayısı çoğu kez iki ile sınırlanacaktır ve $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ gösterimi kullanılacaktır. Doğa durumlarının sayısının dersteki bu sınırlaması karar kuramının sonuçlarının kısıtlanması olarak görülmemelidir. Bu kısıtlamanın amacı doğrular ve konveks kümelerin konu olduğu bölümde de ifade edildiği üzere çözümlemelerin R^2'de çizimlerle yapılabilmesini sağlayıp karar kuramının ana temaları üzerinde yoğunlaşmak ve hesaplamaya dönük konuları ertelemektir.

Fayda fonksiyonunu incelerken karar verme problemiyle karşılaşan karar vericinin sahip olduğu seçenekler karar vereceği sade veya karma eylemlerini de belirlemekteydi; **seçeneklerini kümesi**, yapabileceği eylemlerin kümesini de belirlemekteydi. Burada eylemlerin kümesi **eylem uzayı kümesi** olarak adlandırılıp $\mathcal{A}$ ile gösteri- lecektir. **Karma (ya da rasgele) seçenekler** yerine **karma (ya da rasgele) eylemler** olarak ifade edilecektir. $\mathcal{A}$' nın elemanları $a_1, a_{2,} a_3, \ldots$ gibi sade eylemler olduğunda eylem uzayı kümesi $\mathcal{A} = \{a_1, a_{2,} a_3, \ldots\}$ olarak gösterilecektir.

Doğa durumları uzayında bulunan her doğa durumunda tanımlı bir kayıp fonksiyonu olacağından kayıp fonksiyonu önceden olduğu gibi sadece eylemler kümesinde tanımlı reel değerli fonksiyon yerine $\theta \in \Theta$ ve $a \in \mathcal{A}$ olmak üzere (θ, a) sıralı ikilileri üzerinde

$$\begin{aligned} l(\theta, a) \quad &: \quad \Theta \times \mathcal{A} \to \mathrm{R}, \\ (\theta, a) \in \Theta \times \mathcal{A} \quad &\to \quad l(\theta, a) \in \mathrm{R} \end{aligned}$$

olarak tanımlanacaktır. a, $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ olasılık dağılımı ile belirlenmiş karma bir eylem olduğunda kayıp fonksiyonu değeri $\theta \in \Theta$ doğa durumunda karma eylemi oluşturan olasılık dağılımına uygun olarak bir beklenen değer olacaktır ve

$$E(l(\theta, a)) = p_1 l(\theta, a_1) + p_2 l(\theta, a_2) + \cdots$$

değerini alacaktır. Burada kayıp fonksiyonu özelliklerinin kullanıldığı ve $l(\theta, a)$ kaybı- nın rasgele olarak $l(\theta, a_j)$ değerlerini aldığı görülebilir.

Not: Hangi doğa durumunda bulunulacağı önceden belirli bir kesinlikte bilinmediği için karar verici doğa ile kumar oynayan bir kumarbaz gibidir. Tıpkı oyun teorisinde olduğu gibi karar verici –bu kez kazanmak için alelade bir kumarbaz gibi kazanmak için ayrıca çaba harcamayan- doğaya karşı kumar oynamaktadır. Bu kumar oyunda oyunun başından sonuna oynamayı planladığı hamleler **(eylemler)** dizisinden oluşan bir stratejiye sahiptir bu stratejiye ismini seçilen olasılık dağılımı vermektedir, $(p, 1-p)$ stratejisi gibi. Karar verici için her iki doğa durumunda p olasılığıyla a_1 eylemini, $1-p$ olasılığıyla da a_2 eylemini yapmak bir stratejidir. Bu stratejilerin seçimleriyle her iki doğa durumundaki yaşanacak kayıpları $(E(l(\theta_1, a)), E(l(\theta_2, a)))$ vektörleri temsil etmektedir.

Aşağıdaki örnek ile konuların ilerleyen kesimlerinde de karşılaşılacak olup asansör örneği olarak adlandırılacaktır.

Örnek(Asansör örneği). Çalışma birimi üçüncü katta olan bir çalışan üçüncü kata ulaşmak için iki seçeneği vardır. İlki a_1 merdiven ile önce taban kata inerek asansöre binip üçüncü kata çıkmak, diğeri a_2 merdiveni kullanarak bir kat yukarı çıkıp geri kalan iki katı asansörle çıkmaktır. Doğanın iki durumundan ilki θ_1 asansörün çalış- ması ikincisi de θ_2 asansörün bozuk olmasıdır. Çalışanın kayıp fonksiyonu değerinin merdiven kullanımı ile oransal olduğu düşünülebilir. Birey spora hevesli değildir, zaten yeterince enerji harcadığını düşünmektedir. Asansör çalışıyorken merdivenle bir kat aşağı inmek fazla enerji gerektirmezken, merdiven kullanarak bir kat yukarı çıkmak daha fazla enerji kaybına yol açmaktadır. Asansörün bozuk olduğunu bilmeden bir kat aşağı inip çalışmadığını gördüğünde merdivenle tırmanacağı üç kata ek olarak bir kat daha çıkacaktır.Bir kat yukarı çıkıp asansörün çalışmadığını gördüğün- de iki kat daha çıkacak demektir. Buna uygun olarak kayıp fonksiyonu

$l(\theta_i, a_j)$

	a_1	a_2
θ_1	0	1
θ_2	6	5

verilmiş olsun. Sade eylemlerin kayıp fonksiyonu değerlerinin $l(\theta_1, a_1) = 0$, $l(\theta_1, a_2) = 1$, $l(\theta_2, a_1) = 6$, $l(\theta_2, a_2) = 5$ olduğu görülecektir. Bu örnekte eylem uzayı $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$, doğa durumlarının uzayı $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ ve bütün doğa durumları altında kayıp fonksiyonu yukarıda verildiği gibidir.

Karma bir a eylemine ilişkin olasılık dağılımı, a_1 eyleminin p, a_2 eyleminin $1-p$ olasılıkla yapılacağı $(p, 1-p)$ olsun. Bu durumda a karma eylemine ilişkin kayıp fonksiyonu bir $\theta \in \Theta$ olmak üzere $l(\theta, a)$, p olasılıkla $l(\theta, a_1)$, $1-p$ olasılıkla $l(\theta, a_2)$ değerini alacaktır. a karma seçeneği için kayıp, θ_1 doğa durumunda

$$\begin{aligned} E(l(\theta_1, a)) &= pl(\theta_1, a_1) + (1-p)l(\theta_1, a_2) \\ &= (1-p) \end{aligned}$$

ve θ_2 doğa durumunda

$$\begin{aligned} E(l(\theta_2, a)) &= pl(\theta_2, a_1) + (1-p)l(\theta_2, a_2) \\ &= 6p + 5(1-p) \\ &= 5 + p \end{aligned}$$

olarak hesaplanacaktır. Bundan sonra belirlenen $(p, 1-p)$ bir olasılık dağılımı için bir karma eylemin kayıp değeri *beklenen kayıp* olarak adlandırılacaktır. Gerektikçe $E(l(\theta_1, a))$ için $L(\theta_1, a)$ veya L_1, $E(l(\theta_2, a))$ için $L(\theta_2, a)$ veya L_2 gösterimleri kullanılacaktır. a_j sade eylemleri de $p = 1$ olasılıklı karma eylemler olarak değerlendirile- bilecektir bu nedenle aynı gösterim sade eylemler için de kullanılacaktır. Örneğin θ_1 doğa durumunda a_1 sade eyleminin kayıp fonksiyonu değeri $l(\theta_1, a_1)$, $L(\theta_1, a_1) = 0$ olarak gösterilecektir. Çünkü karar vericinin a_1 sade eylemini yapmaya rasgeleliği kullanmaksızın karar vermesi karar vericinin $a_1 \sim a \sim [a_1, a_2]_{(p,1-p)}$ karma eylemi için olasılık dağılımını $(p, 1-p) = (1, 0)$ olarak belirlemesidir. Benzer olarak θ_2 durumunda yapılan $a_2 \sim a \sim [a_1, a_2]_{(p,1-p)}$ sade eylemi için de olasılık dağılımının $p = 0$ olarak veya $(0, 1)$ olarak belirlenmesidir. Bu durumda da beklenen kayıp $l(\theta_2, a_2) = 5$ olacak ve $L(\theta_2, a_2) = 5$ olarak gösterilecektir.

Doğa durumu uzayında iki doğa durumunun ve eylem uzayında da iki sade eylemin bulunduğu yukarıdaki karar probleminde iki doğa durumunda sade a_1 eylemine ilişkin beklenen kayıplar R^2'de $(L(\theta_1, a_1), L(\theta_2, a_1)) = (l(\theta_1, a_1), l(\theta_2, a_1))$ ve sade a_2 eylemine ilişkin beklenen kayıplar $(L(\theta_1, a_2), L(\theta_2, a_2)) = (l(\theta_1, a_2), l(\theta_2, a_2))$ vektörleriyle gösterilebilir. Çizimde bu vektörler sırasıyla $(L_1, L_2) = (0, 6)$ ve $(L_1, L_2) = (1, 5)$ olarak gösterilmiştir. Herhangi bir karma $a \sim [a_1, a_2]_{(p,1-p)}$ eylemine ilişkin olarak iki doğa durumundaki beklenen kayıplar $(L(\theta_1, a), L(\theta_2, a)) = (L_2, L_2) = (1 - p, 5 + p)$ vektörü ile R^2' temsil edilebilir.

Bütün sade ve karma $a \sim [a_1, a_2]_{(p,1-p)}$ eylemlerine ait beklenen kayıp vektörleri sade eylemlerin konveks kombinasyonları olarak yazılabilecektir:

$$\begin{bmatrix} L(\theta_1, a) \\ L(\theta_2, a) \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} + (1 - p) \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

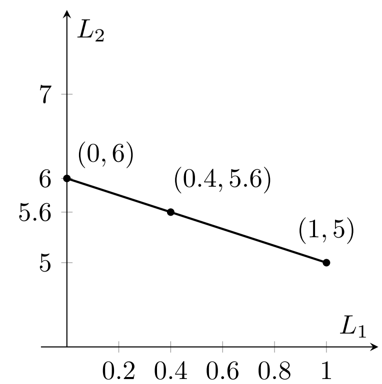
Bu vektörlerin, bütün konveks kombinasyonların, kümesi $(0, 6)$ ve $(1, 5)$ noktalarının uç noktaları olduğu *doğru parçası*na ait noktaların kümesi bir diğer tanımlamayla R^2'de $(0, 6)$ ve $(1, 5)$ noktalarını içeren en dar konveks küme, *konveks kabuk*

$$\left\{ \begin{bmatrix} L_1 \\ L_1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} L(\theta_1, a) \\ L(\theta_2, a) \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} + (1 - p) \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, p \in [0, 1] \right\}$$

dır.

Karar vericinin tüm sade ve karma eylemler içinden seçebileceği eylemlerle iki doğa durumunda da yaşayacağı kayıplar birer vektör olarak doğru parçası olarak ortaya çıkan konveks kümenin içinde yer alır.

Örnek. Asansör örneğinde söz konusu çalışan 0.60 olasılıkla $a_1$eylemi 0.30 olasılıkla a_2 eylemini yapacağı (karma) rasgele eylemi seçmiş olduğunda θ_1 ve θ_2 doğa durumlarındaki kayıp fonksiyonu



Şekil 1.1: Doğanın iki durumu ve eylem kümesinde sade iki eylemin olduğu asansör örneğinde tüm sade ve karma eylemlere de ait kayıp vektörleri (L_1, L_2)'nin kümesi $(0,6)$ ve $(1,5)$ noktalarının konveks kabuğu. $a \sim [a_1, a_2]_{(0.6,0.4)}$ karma eyleminin beklenen kayıp vektörü $(L_1, L_2) = (0.4, 5.6)$ konveks kabuk üzerindedir.

değerleri sırasıyla, $E(l(\theta_1, a)) = 1 - p = 0.40$ ve $E(l(\theta_2, a)) = 5 + p = 5.60$ dır ve bu kayıp değerleri Şekil üzerinde R^2' de doğru parçası üzerinde $(L_1, L_2) = (0.4, 5.60)$ olarak işaretlenmiştir.

İST 304 İstatistik Karar Kuramı ve Yöntemleri **Hafta VI**

Ders 2 : Doğa Durumlarının Belirsizliği Altında Karar Verme II

Dersi anlatan: İhsan Karabulut *Notları yazan: İhsan Karabulut*

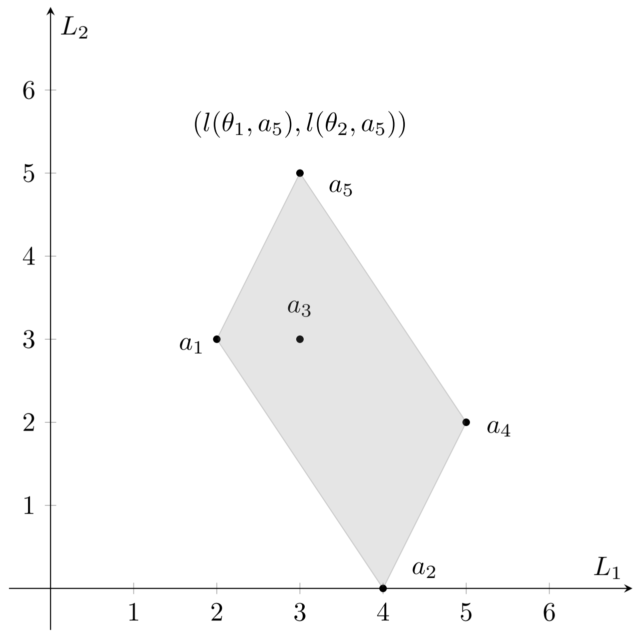
Doğa durumunun belirsizliği altında karar verme problemlerinin grafiksel çizimler kullanılarak çözümlenmesinde tüm sade ve karma eylemlerin beklenen kayıp vektör- lerinin yer aldığı konveks kabuğun doğru olarak çizilmesi önemlidir. Buna hazırlık amaçlı diğer karar problemi örneği aşağıda verilmiştir.

Örnek. Bir karar verme probleminde doğa durumları uzayı $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, sade eylemler uzayı $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ dır. Sade eylemlere ait kayıp fonksiyonu değerlerinin tablosu aşağıdadır:

		$l(\theta_i, a_j)$			
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
θ_1	2	4	3	5	3
θ_2	3	0	3	2	5

Tüm sade ve karma eylemlere ait $(L(\theta_1, a), L(\theta_2, a)) = (L_1, L_2)$ beklenen kayıp vektörleri a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sade eylemlerinin $(L(\theta_1, a_j), L(\theta_2, a_j)) = (l(\theta_1, a_j), l(\theta_2, a_j))$ beklenen vektörlerinin konveks kabuğunda yer alırlar. a_3 sade eylemine ilişkin $(l(\theta_1,a_j),l(\theta_2,a_j))$ beklenen kayıp vektörünün konveks kabuğun biçimini etkilememiştir.

Not: Konveks kabuğun iç bölgesinde yer alan her bir (L_1, L_2) noktasının birbirine eşit $(L(\theta_1, a), L(\theta_2, a))$ beklenen kayıp vektörleri olan eylemlere ait olabileceği dikkatten kaçmamış olmalı. Örneğin, yukarıdaki örnekte iç bölgede yer alan sade a_3 eylemi -ya da başka bir karma eylem- a_5 ile a_4 sade eylemlerinin bir karması ile a_1 sade eyleminin bir karması a^* ile aynı beklenen kayıp vektörüne eşittir. a_3 ile a^* aynı eylemler olmasalar da konveks kabuk içinde aynı nokta - beklenen kayıp vektörü- ile temsil edilirler. Burada sözü edilen a^* rasgele eyleminin $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]_{(12/21,0,0,6/21,3/21)}$ olduğunun



Şekil 2.2: Tüm sade ve karma eylemlerin (L_1, L_2) beklenen kayıp vektörleri a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sade eylemlerinin $(L(\theta_1, a_j), L(\theta_2, a_j)) = (l(\theta_1, a_j), l(\theta_2, a_j))$ kayıp vektörlerinin konveks kabuğunda yer alırlarlar.

okuyucu tarafından bulunması önerilir. a^* eylemine ilişkin beklenen kayıplar

$$L(\theta_1, a^*) = \frac{12}{21} l(\theta_1, a_1) + 0 \times l(\theta_1, a_2) + 0 \times l(\theta_1, a_3) + \frac{6}{21} l(\theta_1, a_4) + \frac{3}{21} l(\theta_1, a_5) = 3$$

ve

$$L(\theta_2, a^*) = \frac{12}{21} l(\theta_2, a_1) + 0 \times l(\theta_2, a_2) + 0 \times l(\theta_2, a_3) + \frac{6}{21} l(\theta_2, a_4) + \frac{3}{21} l(\theta_2, a_5) = 3$$

olup a_3 sade eyleminin kayıp vektörü $(3, 3)$'e eşittir. Burada okuyucu konveks ka- buğun oluşumunda a_3 eylemine ait kayıp vektörünün etkisiz oluşu nedeniyle örnek alındığını düşünmemelidir. Bu durum konveks kabuğun, tanımı gereği, köşe noktaları dışında tüm noktaları için geçerlidir.

Verilen bir karar probleminde doğa durumları uzayı $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_m\}$, sade eylemler uzayı $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ ve her doğa durumu ve sade eylemlere ilişkin kayıp fonksiyonu değerleri $l(\theta_i, a_j)$'nin olması sade ya da karma bir eylemin beklenen kayıp vektörü R^m'de gösterilebilecektir.

Tüm sade ve karma eylemlere ait beklenen kayıp vektörleri karar probleminde yer alan sade eylemlere ilişkin

$$(L_1, L_2, L_3, \ldots, L_m) = (l(\theta_1, a_j), l(\theta_2, a_j), l(\theta_3, a_j), \ldots, l(\theta_m, a_j))$$

beklenen kayıp vektörlerince üretilen ve R^m'de yer alan konveks kabuk içinde yer alacaktır. Konveks kabuğun tüm elemanları $(l(\theta_1, a_j), l(\theta_2, a_j), l(\theta_3, a_j), \ldots, l(\theta_m, a_j))$ noktalarının konveks kombinasyonlarından oluşacaktır. Bu elemanlar her $p_j \geq 0$ ve $\sum_{j=1}^{r} p_j = 1$ için

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(l(\theta_1, a)) \\ E(l(\theta_2, a)) \\ E(l(\theta_3, a)) \\ \vdots \\ E(l(\theta_m, a)) \end{bmatrix} = p_1 \begin{bmatrix} l(\theta_1, a_1) \\ l(\theta_2, a_1) \\ l(\theta_3, a_1) \\ \vdots \\ l(\theta_m, a_1) \end{bmatrix} + p_2 \begin{bmatrix} l(\theta_1, a_2) \\ l(\theta_2, a_2) \\ l(\theta_3, a_2) \\ \vdots \\ l(\theta_m, a_2) \end{bmatrix} + \ldots + p_r \begin{bmatrix} l(\theta_1, a_r) \\ l(\theta_2, a_r) \\ l(\theta_3, a_r) \\ \vdots \\ l(\theta_m, a_r) \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilirler.

Karar verme problemlerinde karar verici kayıp fonksiyonunu kullanmak yerine onun bir fonksiyonu olan *pişmanlık fonksiyonu*nu (regret - fırsat kaybı fonksiyonunu) kullanabilir. Pişmanlık fonksiyonu aşağıdaki gibi tarif edilebilir: Karar verici her bir θ_i doğa durumunda kendisine en az kaybı verdirecek olan $a \in \mathcal{A}$ eylemini belirler, bu

$$m_i = \min_{a \in \mathcal{A}} l(\theta_i, a)$$

olarak gösterilsin. Bu kayıp θ_i doğa durumunda bulunulacağı bilinse dahi, "en iyi eyleme" (bu durumda en az kayıplı eyleme) karar verilmiş olsa da *kaçınılamayacak* kayıptır. Eğer karar verici θ_i doğa durumunda bu eylemi uygulamayıp bir başka a_j eylemini uygularsa en az kayıp vereceği eylemde karar kılmamış olmaktan dolayı fırsat kaybedecektir. Kaybedilen fırsatın büyüklüğü

$$r(\theta_i, a_j) = l(\theta_i, a_j) - m_i$$

pişmanlığının bir ölçüsü olacaktır.

Tanım. m_i, θ_i doğa durumunda en az kaybı veren eylemin kayıp fonksiyonu değeri ve bu doğa durumunda seçilebilecek herhangi bir eylem a_j olmak üzere

$$r(\theta_i, a_j) = l(\theta_i, a_j) - m_i$$

değerine θ_i doğa durumunda a_j eyleminin pişmanlık fonksiyonu değeri denilir.

Pişmanlık fonksiyonu kayıp fonksiyonu ile aynı özelliklere sahiptir, bununla birlikte kayıp fonksiyonuna yapılan bir öteleme dönüşümünü ile elde edilmiştir. Kayıp fonksiyonu yerine pişmanlık fonksiyonunun kullanımı karar vericinin yapacağı bir tercihtir; en az kaybı yaşamak yerine pişmanlığı en az yapmak farklı amaçlardır. Karar verme problemlerinin çözümlenmesi ile seçilecek eylem ya da eylemler kullanılan fonksiyona göre farklılık gösterebilirler.

Not: Eylem seçiminde kullanılan *en iyileme ilkesi* de kayıp veya pişmanlık fonksiyonunun kullanılmasıyla ortaya çıkabilecek farklı eylem kararlarına yol açar. Bir sonraki konuda minimaks ilkesi kullanılarak varılacak eylem kararlarının seçilecek fonksiyona göre değişim gösterebileceği, buna karşın Bayes ilkesi kullanılarak varıla- cak eylem kararlarında seçilecek fonksiyonun sonucu değiştirmeyeceği görülecektir.

Örnek (Son örneğin devamı). Yukarıda verilen karar problemi için her doğa durumunda en az kayba yol açacak sade eylemlerin kayıp fonksiyonu değerleri m_i

			$l(\theta_i,a_j)$			
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\min_{a\in\mathcal{A}} l(\theta_i,a)$
θ_1	2	4	3	5	3	2
θ_2	3	0	3	2	5	0

olarak elde edilir. Buradan pişmanlık fonksiyonu

olarak elde edilmiş olacaktır. Pişmanlık fonksiyonu kullanılmasıyla beklenen kayıp vektörleri yerine beklenen pişmanlık vektörleri söz konusu olacak ve bunların R^2 deki gösterimi (L_1, L_2) yerine

	$r(\theta_i,a_j)$				
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
θ_1	0	2	1	3	1
θ_2	3	0	3	2	5

(R_1, R_2) kullanılarak yapılacaktır. Bu gösterimde beklenen kayıplar için izlenen yol kullanılacaktır. a, olasılık dağılımı $p_j \geq 0$ ve $\sum_{j=1}^{r} p_j = 1$ için bir eylemi göstermek üzere beklenen pişmanlıklar

$$R(\theta_1, a) = E(r(\theta_1, a)) = \sum_{j=1}^{5} p_j r(\theta_1, a_j)$$

ve

$$R(\theta_2, a) = E(r(\theta_2, a)) = \sum_{j=1}^{5} p_j r(\theta_2, a_j)$$

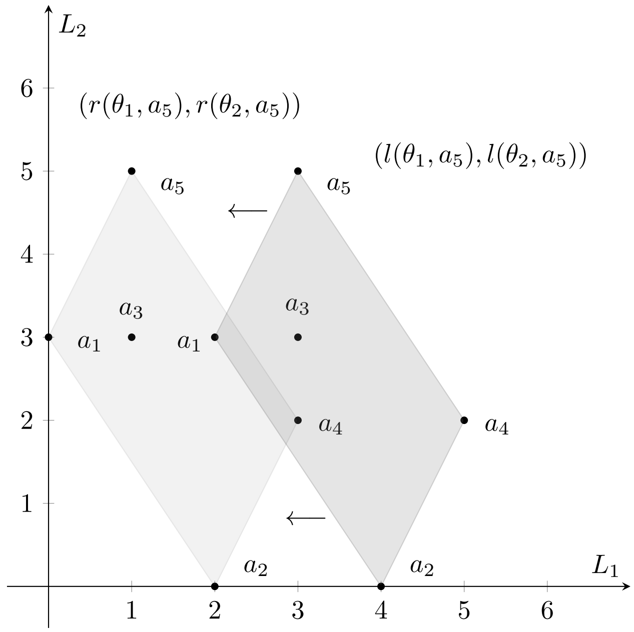
dir

Eylemlere ilişkin **beklenen pişmanlıklar** (R_1, R_2)'ın en küçük konveks kümesi aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi beklenen kayıpların en küçük konveks kümesinin bir ötelemesi olacaktır.

Beklenen tüm sade ve karma pişmanlıkların beklenen değerleri (R_1, R_2) noktaları olarak yukarıdaki şekilde taralı konveks hull da yer alır. Burada pişmanlıkların beklenen değerleri $E\left(r(\theta_i, a)\right) = R_i = E\left(l\left(\theta_i, a\right) - m_i\right) = L_i - m_i$ olarak da hesaplanabilirler. Benzer olarak doğa durumları uzayı $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m\}$ ve sade eylemler uzayı $\mathcal{A} = \{a_1, a_{2,} a_3, \ldots, a_r\}$ olduğunda $a \sim [a_1, a_{2,} a_3, \ldots, a_r]_{(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r)}$ eyleminin beklenen pişmanlık vektörü

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(r(\theta_1, a)) \\ E(r(\theta_2, a)) \\ E(r(\theta_3, a)) \\ \\ E(r(\theta_m, a)) \end{bmatrix} = p_1 \begin{bmatrix} r(\theta_1, a_1) \\ r(\theta_2, a_1) \\ r(\theta_3, a_1) \\ \vdots \\ r(\theta_m, a_1) \end{bmatrix} + p_2 \begin{bmatrix} r(\theta_1, a_2) \\ r(\theta_2, a_2) \\ r(\theta_3, a_2) \\ \vdots \\ r(\theta_m, a_2) \end{bmatrix} + \ldots + p_r \begin{bmatrix} r(\theta_1, a_r) \\ r(\theta_2, a_r) \\ r(\theta_3, a_r) \\ \vdots \\ r(\theta_m, a_r) \end{bmatrix}$$

olarak ya da yukarıdaki gibi kısaca her bileşen $R_i = L_i - m_i$ olarak ifade edilecektir.



Şekil 2.3: Kayıp fonksiyonu yerine pişmanlık fonksiyonu kullanıldığında kayıp fonksiyonuna dayalı konveks hull ötelenmiş olur.

Kaynaklar

[1] D. Blackwell and M.A. Girshick (1979), Theory of games and statistical decisions, *Dover Publications*, New York.

[2] H. Chernoff and L. E. Moses (1986), Elementary Decision Theory, *Dover Publications*, New York.

[3] B. W. Lindgren (1971), Elements of Decision Theory, *Macmillan Company*, New York.