Lineer Olmayan Korunumlu Sistemler

Bilindiği üzere herhangi bir dinamik sistemin işleyişinde çoğunlukla bir çeşit sürtünmeden dolayı enerji kaybı olur. Bununla beraber, belli durumlarda bu kayıp o kadar yavaştır ki kısa zaman aralıklarında ihmal edilebilir. Böyle durumlarda enerjinin korunum yasasının varlığı, yani kinetik enerji ve potansiyel enerji toplamının sabit olduğu varsayılır.
Kinetik enerji ve potansiyel enerji toplamının her noktada sabit olduğu sistemler *korunumlu sistem* adını alır.

Bu bölümde

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0 \tag{1}$$

denklemi ile tanımlı lineer olmayan korunumlu bir sistem ele alınacaktır. Burada sönüm kuvveti sıfırdır ve sonuç olarak enerji kaybı yoktur.

(1) denklemi

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{f(x)}{m} \end{cases} \tag{2}$$

otonom sistemine eşdeğerdir.

(2) sisteminden

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{my} \tag{3}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (3) denklemi (2) nin yörüngelerinin diferensiyel denklemidir.

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0$$

olmak üzere (3) denklemi çözülürse,

$$\frac{1}{2}my^2 + \int_0^x f(s)ds = \frac{1}{2}my_0^2 + \int_0^{x_0} f(s)ds \tag{4}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{1}{2}my^2 = \frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2$$

ve

$$V(x) = \int_0^x f(s)ds$$

sırasıyla, dinamik sistemin kinetik ve potansiyel enerjileridir. Bu yüzden (4) eşitliği

$$E = \frac{1}{2}my_0^2 + V(x_0)$$

sistemin sabit toplam enerjisi olmak üzere

$$\frac{1}{2}my^2 + V(x) = E \tag{5}$$

şeklinde enerjinin korunumu yasasını ifade eder.

(5) eşitliği, (3) denkleminin çözülmesi ile elde edildiğinden, (2) nin yörüngelerinin denklemidir.

(2) sisteminin kritik noktaları $f(x) = 0$ denkleminin kökleri x_c ler olmak üzere $(x_c, 0)$ noktalarıdır.

Teorem 1. $(x_c, 0)$ (2) sisteminin kritik noktası olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $V(x)$, $x = x_c$ de bir yerel minimuma sahip ise, bu durumda $(x_c, 0)$ merkez nokta olup kararlıdır.

(ii) $V(x)$, $x = x_c$ de bir yerel maksimuma sahip ise, bu durumda $(x_c, 0)$ bir semer noktası olup kararsızdır.

(iii) $V(x)$, $x = x_c$ de bir yatay büküm noktasına sahip ise, bu durumda $(x_c, 0)$ bir dejenere nokta olup kararsızdır.

Örnek 1.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (4x - 4x^3) = 0 \tag{6}$$

diferensiyel denklemi ile tanımlı olan sistemin yörüngellerini ve kritik noktalarını bulunuz, kritik nokta türünü belirleyiniz.

Çözüm. (6) denklemine eşdeğer sistem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 4x^3 - 4x \end{cases} \tag{7}$$

dir. (7) sisteminin yörüngeleri

$$\frac{1}{2}y^2 - x^4 + 2x^2 = E$$

olup,

$$V(x) = \int_0^x f(s)ds = -x^4 + 2x^2 \tag{8}$$

potansiyel enerji fonksiyonudur. (7) sisteminin kritik noktaları açık olarak $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(-1,0)$ dır. (8) den görülebilir ki, $V(x)$ potansiyel enerji fonksiyonu $x = 0$ da bir yerel minimuma, $x = -1$ ve $x = 1$ de yerel maksimuma sahiptir.

Buna göre Teorem 1 den $(0,0)$ kritik noktası bir merkez nokta olup kararlıdır, $(-1,0)$ ve $(1,0)$ noktaları da semer noktaları olup kararsızdır.