ÜNİTE I

SAYILAR

☞ BU ÜNİTENİN AMAÇLARI ☜

DOĞAL SAYILAR

* Doğal sayıları tanımlayarak, doğal sayılar kümesinde eşitliğin özeliklerini ve sadeleşme kurallarını tanıyabilecek,
* Bir doğal sayının kuvvetini ve üslü ifadelere ait tanım ve özelikleri belirtebilecek,
* Asal sayıyı ve aralarında asal olan sayıları belirtebilecek, bir doğal sayıyı asal çarpanlarına ayırabilecek,
* Doğal sayıların 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11 ile bölünebilme kurallarını açıklayabilecek,
* İki veya daha çok doğal sayının, en büyük ortak böleni ve en küçük ortak katını bularak, problemlere uygulayabilecektir.

TAM SAYILAR

* Tam sayılar kümesini tanımlayarak, bu kümede toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini yaparak özeliklerini açıklayabilecek,
* Tek ve çift tam sayıları, tam sayılar kümesindeki elemanlarını tanıyabilecek, bunlarla ilgili uygulamaları yapabilecek,
* Tam sayılarda verilen Δ işlemine göre, sistemin bir grup olup olmadığını açıklayabilecektir.

MODÜLER ARİTMETİK

* Tam sayılarda kalanlı bölmede, kalan sınıfılarını ve kalan sınıflarının kümesini ve özeliklerini açıklayabilecek,
* Kalan sınıflar kümesinde, toplama ve çarpma işleminin özeliklerini açıklayabilecek ve bunlarla ilgili problemleri çözebilecektir.

RASYONEL SAYILAR

* Rasyonel sayıları tanıyarak, rasyonel sayıların eşitliğini açıklayabilecek,
* Rasyonel sayılar kümesinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini yapabilecek ve özeliklerini açıklayabilecek,
* Rasyonel sayıları sayı doğrusu üzerinde gösterebilecek ve bu sayıların yoğunluğunu açıklayabilecek,

GERÇEK SAYILAR

* Gerçek sayıları tanıyarak özeliklerini açıklayabilecek,
* Gerçek sayılarda, sıralama ve aralık kavramını açıklayarak sayı doğrusu üzerinde gösterebilecek,
* Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler ile eşitsizliklerin çözüm kümelerini, değişik sayı kümelerinde bulabilecektir.

MUTLAK DEĞER

* Bir gerçek sayının mutlak değerini ve bununla ilgili özelikleri açıklayabilecek,
* Birinci dereceden bir bilinmeyenli mutlak değeri içeren denklemlerin ve eşitsizliklerin, çözüm kümelerini, bütün sayı kümelerinde bulabilecektir.

ÜSLÜ SAYILAR

* Bir gerçek sayının pozitif tam sayı ve negatif tam sayı kuvvetlerini açıklayabilecek,
* Üslü sayının toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri ile üslü bir sayının kuvvetine ait uygulamaları yapabilecek,
* Üslü sayıların eşitliğini açıklayabilecek ve bunlarla ilgili problemleri çözebilecektir.

KÖKLÜ SAYILAR

* Köklü sayıları tanıyarak bunlarla ilgili toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini yapabilecek,
* Kareköklü denklemleri çözebilecek ve bununla ilgili uygulamaları yapabilecek,
* Gerçek sayının pozitif tam kuvvetten kökünü ve üslü biçimini yazabilecek,
* Köklü sayıların paydalarını rasyonel yapabilecek ve köklü sayılarla ilgili her türlü uygulamaları yapabilecektir.

PROBLEMLER

* Günlük hayatla ilgili, oran ve orantı, sayı, yüzde ve faiz, yaş, hareket, iş ve havuz problemlerini çözebilecektir.

* Üslü sayıların eşitliğini açıklayabilecek ve bunlarla ilgili problemleri çözebilecektir.

NASIL ÇALIŞMALIYIZ?

* Sayılar ile ilgili bilgilerinizi hatırlamak için, daha önceki öğrendiklerinizi tekrarlayınız.
* Kaynak kitaplardan faydalanarak çok sayıda soru çözünüz.
* Alıştırmalardaki her soruyu dikkatle okuyarak çözünüz. Eğer çözemezseniz, konu üzerinde beceri kazanıncaya kadar, çözülmüş örneklerle ilişki kurarak kavramaya çalışınız.
* Konu sonunda verilen alıştırma ve değerlendirme sorularını cevaplayınız.

ÜNİTE I

SAYILAR

Daha önceki sınıflarda, sayı kavramı ve sayılarla ilgili birtakım bilgileri öğrendik. Bu bölümde, sayıları daha detaylı bir şekilde öğreneceğiz.

Ortak özeliklerine göre sayıları, sayma sayıları kümesi, doğal sayılar kümesi, tam sayılar kümesi, rasyonel sayılar kümesi, irasyonel sayılar kümesi ve gerçek (reel) sayılar kümesi olarak gruplara ayırabiliriz.

1. DOĞAL SAYILAR

a. Tanım

Sonlu bir kümenin elemanlarının kaç tane olduğunu belirten 0, 1, 2, 3, ..., n, ... sayılarından her birine doğal sayı denir. Bütün sonlu kümelerin eleman sayılarının kümesine, doğal sayılar kümesi denir. Doğal sayılar kümesi N ile gösterilir. $N = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ şeklinde yazılır.

ÖRNEK 1.1

Boş kümenin elemanı olmadığından, boş kümenin eleman sayısı sıfır doğal sayıdır. $s(\varnothing) = 0$ dır.

$A = \{\blacklozenge\}$ kümesinin bir elemanı olduğundan, $s(A) = 1$ dir.

$B = \{\blacklozenge, \blacksquare\}$ kümesinin iki elemanı olduğundan, $s(B) = 2$ dir.

Sıfırın dışındaki bütün doğal sayılara, sayma sayıları denir. Sayma sayılar kümesi N^+ ile gösterilir.

$N^+ = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ şeklinde yazılır. $N^+ \subset N$ veya $N^+ = N - \{0\}$ dir. Buna göre, en küçük doğal sayı sıfır, en küçük sayma sayısı birdir.

En büyük doğal sayı veya sayma sayısı bulunamaz.

İki ile bölünebilen doğal sayılara çift doğal sayılar, iki ile bölünemeyen doğal sayılara da tek doğal sayılar denir.

Çift doğal sayılar kümesinin Ç ile gösterirsek;

$Ç = \{0, 2, 4, 6, ...\}$ veya $Ç = \{x \mid x = 2n, n \in N\}$ şeklinde yazabiliriz.

Tek doğal sayılar kümesini T ile gösterirsek;

$T = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ veya $T = \{x \mid x = 2n + 1, n \in N\}$ şeklinde yazabiliriz.

T tek doğal sayı, Ç çift doğal sayı olmak üzere, aşağıdaki işlemleri yazabiliriz.

1. Ç + Ç = Ç
2. T + T = Ç
3. T + Ç = T
4. Ç . Ç = Ç
5. Ç . T = Ç
6. T . T = T
7. $Ç^n = Ç$ $(n \in N^+)$
8. $T^n = T$ $(n \in N)$

Her doğal sayının bir ardışığı vardır. 2 nin ardışığı 3 tür.

n doğal sayısının ardışığı ise n +1 dir.

b. Doğal Sayılarda Eşitliğin Özellikleri

Her $a, b, c \in N$ için

1. $a = a$ (Yansıma özeliği)
2. $a = b \Rightarrow b = a$ (Simetri özeliği)
3. $a = b$ ve $b = c \Rightarrow a = c$ (Geçişme özeliği)
4. $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ (Toplama işmeminin sadeleşme özeliği)
5. $c \neq 0$, $a . c = b. c \Rightarrow a = b$ (Çarpma işleminin sadeleşme özeliği)
6. $a + b = b + a$ ve $a . b = b . a$ (Değişme özeliği)
7. $a + 0 = 0 + a = a$ (Toplama işleminin etkisiz eleman özeliği)
8. $a . 1 = 1 . a = a$ (Çarpma işleminin etkisiz eleman özeliği)
9. $a . 0 = 0. a = 0$ (Çarpma işleminin yutan eleman özeliği)
10. $a, b \in N$ için, $a + b \in N$ (Toplama işleminin kapalılık özeliği)
11. $a, b . c \in N$ için, $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Toplama işleminin bileşme özeliği)
12. $a, b \in N$ için, $a. b \in N$ (Çarpma işleminin kapalılık özeliği)
13. $a, b, c \in N$ için, $a. (b . c) = (a . b) . c$ (Çarpma işleminin birleşme özeliği)
14. $a, b, c \in N$ için, $a. (b + c) = a . b + a . c$ (Çarpmanın toplama işlemi üzerine soldan dağılma özeliği)
15. $a, b, c \in N$ için, $(b + c) . a = b . a + c . a$ (Çarpmanın toplama işlemi üzerine sağdan dağılma özeliği)

c. Doğal Sayının Kuvveti

a ve n birer doğal sayı ve $n \neq 0$ olmak üzere, n tane a nın çarpılmasından elde edilen sayıya, a nın n inci kuvveti denir. a^n şeklinde yazılır.

a^n de a sayısına taban, n sayısına üs ve a^n sayısına da a nın n inci kuvveti denir.

- Her a doğal sayısı için, birinci kuvvet kendisine eşittir. $a^1 = a$ dır.
- Sıfırın dışındaki bütün a doğal sayıları için, sıfırıncı kuvvet birdir. $a^0 = 1$ dir.
- n birden büyük olmak üzere, $a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,...\, a}_{n \text{ tane}}$ dir.
- n sıfırdan farklı olmak üzere, sıfırın n ninci kuvveti sıfırdır. $0^n = 0$ dır.
- Birin bütün kuvvetleri birdir. $1^n = 1$ dir.
- Sıfırın sıfırıncı kuvveti tanımsızdır. 0^0 tanımsızdır.

ÖRNEK 1.2

Verilen sayıları, sayının kuvveti olarak yazalım.

1. $3 . 3 = 3^2$
2. $5 . 5 . 5 = 5^3$
3. $7 . 7 . 7 . 7 . 7 = 7^5$

ÖRNEK 1.3

Kuvvetleri verilen doğal sayıların değerlerini bulalım.

1. $9^0 = 1$
2. $1^8 = 1$
3. $0^5 = 0$

Kuvvetin Özelikleri

a, b, m, n doğal sayılar, $a \neq 0$, $b \neq 0$ olmak üzere,

1. $a^m . a^n = a^{n+n}$
2. $(a^m)^n = a^{m . n}$
3. $(a . b)^n = a^n . b^n$

ÖRNEK 1.4

Aşağıda verilen işlemleri yapalım.

1. $2^3 . 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

2. $(5^2)^3 = 5^{2 . 3} = 5^6$

3. $(3 . 7)^2 = 3^2 . 7^2$

ÖRNEK 1. 5

$a \in N$ ve $(4a^2)^3 . (a^3)^4 = 2^m . a^n$ ise m ve n doğal sayılarının değerlerini bulalım.

$4^3 . a^6 . a^{12} = 2^m a^n$

$(2^2)^3 . a^{6+12} = 2^m a^n$

$2^6 . a^{18} = 2^m a^n$

tabanları eşit olan sayıların üsleride eşit olacağından, m = 6 ve n = 18 olur.

ÖRNEK 1.6

$32 . 125^2$ sayısının kaç basamaklı olduğunu bulalım.

$32 . 125^2 = 2^5 . (5^3)^2 = 2^5 . 5^6 = 2^5 . 5^5 . 5$

$= (2 . 5)^5 . 5 = 10^5 . 5$ dir.

Buna göre, 5 sayısının yanına 5 tane sıfır yazarsak, bu sayının 5 + 1 = 6 basamaklı olur.

ç. Asal Sayılar

Birden büyük olan, bir ve kendisinden başka böleni olmayan doğal sayılara asal sayı denir.

2 nin bölenleri 1 ile 2 dir. Bölenler kümesi {1, 2} olduğundan, 2 asal sayıdır.

3 ün bölenleri 1 ile 3 tür. Bölenler kümesi {1, 3} olduğundan, 3 özel sayıdır.

4 ün bölenleri 1, 2, 4 tür. Bölenler kümesi {1, 2, 4} olduğundan, 4 asal sayı değildir.

O halde, bölenler kümesi iki elemanlı olan doğal sayılara asal sayı denir. Buna göre; 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... sayıları asal sayılardır. 2 hariç bütün asal sayılar tek doğal sayılardır. Asal sayılar kümesini: $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...\}$ şeklinde yazabiliriz.

$a, b, c \in N$ için, $a = b . c$ oluyorsa b ile c doğal sayılarına, a nın çarpanları denir. b ve c asal sayı ise, b ile c sayılarına, a nın asal çarpanları denir.

Birden başka ortak böleni olmayan iki doğal sayıya, aralarında asaldır denir.

ÖRNEK 1. 7

Aşağıdaki sayılardan hangilerinin aralarında asal sayı olup olmadığını gösterelim.

1. 7 ve 13 sayılarının aynı anda 1 den başka ortak böleni olmadığından, 7 ile 13 sayıları aralarında asal sayıdır.
2. 25 ile 45 sayılarının her ikisini de 5 sayısını böler. 25 ve 45 sayıları aralarında asal değildir.
3. 18 ile 215 sayılarının ortak böleni 1 dir. 18 ve 215 sayıları aralarında asaldır.

ÖRNEK 1.8

Sıfır, bir ve iki doğal sayılarının asal sayı olup olmadığını araştıralım.

- Sıfır (0) asal sayı değildir. Çünkü, bölenleri kümesi sonsuz bir kümedir.
- Bir (1) asal sayı değildir. Çünkü bölenleri kümesi bir elemanlıdır, kendisinden başka çarpanı yoktur.
- İki (2) en küçük bir asal sayıdır.

ÖRNEK 1.9

x ve y birer doğal sayıdır. $(3x - 2)$ ve $(2y + 1)$ sayıları aralarında asal ve $\frac{3x - 2}{2y + 1} = \frac{7}{5}$ bağıntısı vardır. Buna göre, $x . y$ nin kaç olduğunu bulalım.

7 ile 5 sayıları aralarında asal olduğu için, $3x - 2 = 7$ ve $2y + 1 = 5$ sayıları da asaldır.

Buna göre,

$3x - 2 = 7$; $3x = 7 + 2$; $3x = 9$; $x = 3$ tür.

$2y + 1 = 5$; $2y = 5 - 1$; $2y = 4$; $y = 2$ dir.

O halde, $x . y = 3 . 2 = 6$ olur.

d. Bölünebilme Kuralları

I. 2 ile Bölünebilme Kuralı

Herhangi bir doğal sayının birler basamağında; 0, 2, 4, 6, 8 rakamlarından biri var ise, bu sayı 2 ile tam bölünebilir. Yani çift sayılar 2 ile tam olarak bölünebilir.

ÖRNEK 1.10

Aşağıdaki sayılardan hangilerinin 2 ile tam bölünüp, bölünemeyeceğini gösterelim.

1. 432 sayısının birler basamağındaki rakam 2 çift sayı olduğundan, 2 ile tam bölünebilir.
2. 720 sayısının birler basamağındaki rakam 0 çift sayı olduğundan, 2 ile tam bölünebilir.
3. 321 sayısının birler basamağındaki rakam 1 çift sayı olmadığından, 2 ile tam bölünemez.

Bir basamağında 1, 3, 5, 7, 9 rakamlarından biri bulunan sayılar, 2 ile kalansız bölünemezler. Bu sayıların 2 ile bölümünden, kalan 1 dir.

II. 3 ile Bölünebilme Kuralı

Herhangi bir doğal sayının basamaklarındaki rakamların sayı değerleri toplamı, 3 ve 3'ün katı ise bu doğal sayı 3 ile tam bölünebilir.

ÖRNEK 1.11

1. 3615 sayısının rakamlarının sayı değerleri toplamı, $3 + 6 + 1 + 5 = 15$ dir.

   15 sayısı, 3 ün katı olduğundan, 3615 sayısı 3 ile tam bölünebilir.
2. 57223 sayısının rakamlarının sayı değerleri toplamı, $5 + 7 + 2 + 2 + 3 = 19$ dur.

   19 sayısı, 3 ün katı olmadığından, 57223 sayısı 3 ile tam bölünemez.
3. Dört basamaklı 4a13 sayısının 3 ile tam bölünebilmesi için, "a" nın alabileceği değerleri bulalım.

   $4 + a + 1 + 3 = 8 + a$ dır. $8 + a$ nın 3 ün katı bir sayı olabilmesi için, a nın alabileceği değerler, 1, 4 ve 7 olur.

III. 4 ile Bölünebilme Kuralı

Herhangi bir doğal sayının birler ve onlar basamağındaki rakamlarının oluşturduğu iki basamaklı sayı, 4 ile bölünüyorsa bu sayı 4 ile tam bölünebilir.

ÖRNEK 1.12

Aşağıdaki sayılardan hangilerinin, 4 ile tam bölünüp, bölünemeyeceğini gösterelim.

1. 4340 sayısında, 40; 4 ün katı olduğundan, 4340 sayısı 4 ile tam bölünebilir.
2. 1900 sayısında 00; 4 ün katı olduğundan, 1900 sayısı 4 ile tam bölünebilir.
3. 8822 sayısında, 22; 4 ün katı olmadığından, 8822 sayısı 4 ile tam bölünemez.

IV. 5 ile Bölünebilme Kuralı

Herhangi bir doğal sayının, birler ve onlar basamağındaki rakamı 0 veya 5 olan sayılar, 5 ile tam bölünebilir.

ÖRNEK 1.13

Aşağıdaki sayılardan hangilerinin, 5 ile tam bölünüp, bölünemeyeceğini gösterelim.

1. 845 sayısının birler basamağı 5 olduğundan, 845 sayısı 5 ile tam bölünebilir.
2. 342 sayısının birler basamağı 2 olduğundan, 342 sayısı 5 ile tam bölünemez.
3. 1780 sayısının birler basamağı 0 olduğundan, 1780 sayısı 5 ile tam bölünebilir.

V. 8 ile Bölünebilme Kuralı

Herhangi bir doğal sayının son üç basamağı 8 in katı veya 000 olan sayılar 8 ile tam bölünebilir.

ÖRNEK 1.14

Aşağıdaki sayılardan hangilerinin 8 ile tam bölünüp, bölünemeyeceğini gösterelim.

1. 5480 sayısında, 480; 8 in katı olduğundan, 5480 sayısı 8 ile tam bölünebilir.
2. 2800 sayısında, 800; 8 in katı olduğundan, 2800 sayısı 8 ile tam bölünebilir.
3. 8972 sayısında, 972; 8 in katı olmadığından, 8972 sayısı 8 ile tam bölünemez.

VI. 9 ile Bölünebilme Kuralı

Herhangi bir doğal sayının rakamlarının toplamı 9 veya 9 un katı olan sayılar, 9 ile tam bölünebilir.

ÖRNEK 1.15

Aşağıdaki sayılardan hangilerinin 9 ile tam bölünüp, bölünemeyeceğini gösterelim.

1. 57636 sayısının rakamlarının sayı değerleri toplamı, $5 + 7 + 6 + 3 + 6 = 27$ dir. 27 sayısı 9 un katı olduğundan, 57636 sayısı 9 a tam bölünebilir.

2. 36510 sayısının rakamlarının sayı değerleri toplamı, $3 + 6 + 5 + 1 + 0 = 15$ dir. 15 sayısı 9 un katı olmadığından, 36510 sayısı 9 a tam bölünemez.

3. 2ab6 dört basamaklı bir sayıdır. Bu sayı 9 ile tam bölünebildiğine göre, $a + b$ nin en fazla kaç olabileceğini bulalım.

Dört basamaklı 2ab6 sayısı 9 ile tam bölünebildiğine göre,

$2 + a + b + 6 = a + b + 8$ sayısının toplamı 9 un katı olmalıdır.

$a + b + 8 = 9$ veya $a + b + 8 = 18$ olabilir. Buradan,

$a + b = 1$ veya $a + b = 10$ olur.

O halde, $a + b$ en fazla 10 olur.

VII. 11 ile Bölünebilme Kuralı

Herhangi bir doğal sayının basamaklarındaki rakamları, sağdan sola doğru birer basamak atlayarak, sayı değerlerini toplayalım. Bu toplamdan, arada kalan basamaklardaki rakamların sayı değerleri toplamını çıkalım. Fark (0) sıfır veya 11 in katı ise bu sayı 11 ile tam bölünebilir.

ÖRNEK 1.16

1. 542135 sayısının 11 ile tam bölünüp, bölünemeyeceğini gösterelim.

5<u>4</u>2<u>1</u>3<u>5</u> sayısında, işaretlediğimiz rakamların sayı değerleri toplamından, arada kalan rakamların sayı değerleri toplamını çıkaralım.

$(5 + 1 + 4) - (3 + 2 + 5) = 10 - 10 = 0$ olduğundan, 542135 sayısı 11 ile tam bölünebilir.

2. 71423 sayısının 11 ile tam bölünüp, bölünemeyeceğini gösterelim.

<u>7</u>1<u>4</u>2<u>3</u> sayısında, işaretlediğimiz rakamların sayı değerleri toplamından, arada kalan rakamların sayı değerleri toplamını çıkaralım.

$(7 + 4 + 3) - (2 + 1) = 14 - 3 = 11$ olduğundan, 71423 sayısı 11 ile tam bölünebilir.

3. 269218 sayısının 11 ile bölünüp, bölünemeyeceğini bulalım.

2<u>6</u>9<u>2</u>1<u>8</u> $= (8 + 2 + 6) - (1 + 9 + 2) = 16 - 12 = 4$ olduğundan, 269218 sayısı 11 ile tam bölünemez.

e. Aralarında Asal Sayıların Çarpımı ile Bölünebilme

a ile b aralarında asal iki sayı olsun. Hem a, hem de b ile tam bölünebilen her sayı $a \cdot b$ ile de tam bölünebilir.

a doğal sayısı ile tam bölünebilen bir sayı, a nın her çarpanı ile de tam bölünebilir.

O halde, farklı iki sayı ile ayrı ayrı tam bölünebilen bir doğal sayı, bu asal sayıların çarpımı ile de tam bölünebilir.

ÖRNEK 1.17

Hem 2 hemde 3 ile bölünebilen sayılar 2 . 3 = 6 sayısı ile de tam bölünebilir.

Buna göre, aşağıdaki sayılardan hangileri 6 ile tam bölünüp, bölünemeyeceğini gösterelim.

1. 5046 sayısı, 3 ile hem de 2 ile tam bölünüyor. Bu sayı 6 ile de tam bölünebilir.
2. 3927 sayısı, 3 ile tam bölünüyor, ancak 2 ile tam bölünemez. Bu sayı 6 ile de tam bölünemez.
3. 73112 sayısı, 2 ile tam bölünüyor, ancak 3 ile tam bölünemez. Bu sayı 6 ile de tam bölünemez.

ÖRNEK 1.18

Hem 3 hem de 5 ile tam bölünebilen sayılar 3 . 5 = 15 sayısı ile de tam bölünebilir.

Buna göre, 60 sayısının 15 sayısı ile tam bölünüp, bölünemiyeceğini gösterelim.

15 = 3 . 5 gibi asal sayılara ayırabiliriz.

60 sayısı 3 ile tam bölünebilir. 60 : 3 = 20 dir.

60 sayısı 5 ile tam bölünebilir. 60 : 5 = 12 dir.

O halde, 60 sayısı 3 ile 5 sayısının çarpımı olan 15 sayısı ile de tam bölünebilir.

ÖRNEK 1.19

Dört basamaklı 96a5 sayısının 15 ile tam bölünebilmesi için, a yerine yazılabilecek rakamların kümesini yazalım.

96a5 sayısının 15 ile tam bölünebilmesi için, bu sayı 15 = 3. 5 olduğundan, hem 3 hem de 5 ile tam bölünebilmelidir. Birler basamağındaki rakam 5 olduğundan 96a5 sayısı 5 ile tam bölünüyor. 96a5 sayısının 3 ile de tam bölünebilmesi için, basamaklarındaki rakamların sayı değerlerinin toplamı olan, 9 + 6 + a + 5 = 20 + a sayısı 3 ün katı olmalıdır. Buna göre, a yerine, 1, 4, 7 rakamlarından biri yazılabilir.

O halde, a yerine yazılabilecek rakamların kümesi {1, 4, 7} olur.

f. En Büyük Ortak Bölen (EBOB)

İki ya da daha çok doğal sayının her birini tam bölen en büyük sayma sayısına, bu sayıların en büyük ortak böleni denir. (EBOB) şeklinde yazılabilir.

ÖRNEK 1.20

90 ve 72 sayılarının en büyük ortak bölenini (EBOB) bulalım.

90 ve 72 sayıların EBOB, hem 90 ve hem de 72 yi tam bölen en büyük doğal sayıdır. Bu iki sayının EBOB bulmak için,

90	2	72	2
45	3	36	2
15	3	18	2
5	5	9	3
	1	3	3
			1

$90 = 2 \,.\, 3^2 \,.\, 5$

$72 = 2^3 \,.\, 3^2$ olduğundan,

EBOB $(90 \,;\, 72) = 2 \,.\, 3^2 = 2 \,.\, 9 = 18$ olur.

EBOB bulurken, 90 ve 72 nin asal çarpanlarından ortak olanların en küçük üslüleri alınıp çarpılır.

g. En Küçük Ortak Kat (EKOK)

İki ya da daha çok doğal sayının, ortak katlarından en küçüğüne, bu sayıların en küçük ortak katı denir. (EKOK) şeklinde yazılabilir.

ÖRNEK 1. 21

24 ve 84 sayılarının en küçük ortak katını (EKOK) bulalım.

24	2	84	2
12	2	42	2
6	2	21	3
3	3	7	7
	1		1

$24 = 2^3 \,.\, 3$

$84 = 2^2 \,.\, 3 \,.\, 7$ EKOK $(24, 84) = 2^3 \,.\, 3 \,.\, 7 = 8 \,.\, 21 = 168$ dir.

EKOK bulurken, 24 ve 84 ün asal çarpanlarından üsleri en büyük olanlar ile ortak olmayanların hepsinin çarpımı yapılır.

h. Doğal Sayılarda Sıralama

a ve b doğal sayıları verilsin. $a + c = b$ olacak şekilde bir $c \in N^+$ varsa, "a sayısı b sayısından küçüktür"denir. $a < b$ şeklinde gösterilir.

O halde, $a < b$ ise $a + c = b$ olacak şekilde, mutlaka bir $c \in N^+$ sayısı vardır. $a < b$ yerine, $b > a$ da yazılabilir. $a \leq b$ ise $a < b$ veya $a = b$ şeklindedir.

ÖRNEK 1. 22

1. $5 + 9 = 14$ ise $5 < 14$ dür.
   $5 + 9 = 14$ ise $9 < 14$ dür.
2. $8 < 12$ ise $8 + 4 = 12$ olacak şekilde bir $4 \in N$ vardır.
3. $5 < 11$ ve $11 < 13$ ise $5 < 13$ olur.

Doğal Sayılarda Sıralamanın Özelikleri

1. Her $a, b \in N$ için, aşağıdaki üç durumdan, yalnız ve yalnız birisi doğrudur.
   (1) $a < b$; (2) $a > b$; (3) $a = b$
2. Her $a, b, c \in N$ için, $a < b$ ve $b < c$ ise $a < b$ (Geçişme özeliği)
3. Her $a, b, c \in N$ için, $a + c < b + c$ ise $a < b$ (Sadeleştirme)
4. Her $a, b \in N$ ve $c \in N^+$ için, $a . c < b . c$ ise $a < b$ (Sadeleştirme)
5. $a < b$ ve $c < d$ ise $a + c < b + d$ (Eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir)

Sizde doğal sayılarda sıralamanın özeliklerine ait doğal sayılarla çeşitli işlemler yaparak doğruluğunu gösteriniz.

ÖZET

* Sonlu bir kümenin elemanlarının kaç tane olduğunu belirten 0, 1, 2, 3, ..., n, ... sayılarından her birine, doğal sayı denir. Bütün sonlu kümelerin eleman sayılarının kümesine, doğal sayılar kümesi denir. N ile gösterilir.

* Sıfırın dışındaki bütün doğal sayılara, sayma sayıları denir. Sayma sayılar kümesi N^+ ile gösterilir.

* İki ile bölünebilen doğal sayılara, çift doğal sayılar, iki ile bölünemeyen doğal sayılara da, tek doğal sayılar denir.

* a ve n birer doğal sayı ve $n \neq 0$ olmak üzere, n tane a nın çarpılmasından elde edilen sayıya, a nın n inci kuvveti denir. a^n şeklinde yazılır.

  $a^m . a^n = a^{m+n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $(a . b)^n = a^n b^n$ dir.

* a, b, m, n doğal sayılar $a \neq 0$, $b \neq 0$ olmak üzere,

* Birden büyük olan, bir ve kendisinden başka böleni olmayan doğal sayılara, asal sayı denir.

* a, b, c $\in$ N için, a = b . c oluyorsa b ile c doğal ayılarına, a nın çarpanları denir. b ile c asal sayı ise bunlara a nın asal çarpanları denir.

* Birden başka ortak böleni olmayan iki doğal sayıya, aralarında asaldırlar denir.

* **2 ile bölünebilme kuralı:** Herhangi bir doğal sayının, birler basamağında, 0, 2, 4, 6, 8 rakamlarından biri var ise bu sayı 2 ile tam bölünebilir.

* **3 ile bölünebilme kuralı:** Herhangi bir doğal sayının, basamaklarındaki rakamların sayı değerleri toplamı, 3 ve 3 ün katı ise bu doğal sayı 3 ile tam bölünebilir.

* **4 ile bölünebilme kuralı:** Herhangi bir doğal sayının, birler ve onlar basamağındaki rakamların oluşturduğu iki basamaklı sayı 4 ile bölünüyorsa, bu sayı 4 ile tam bölünebilir.

* **5 ile bölünebilme kuralı:** Herhangi bir doğal sayının, birler basamağındaki rakamı 0 veya 5 olan sayılar, 5 ile tam bölünebilir.

* **8 ile bölünebilme kuralı:** Herhangi bir doğal sayının, son üç basamağı 8 in katı veya 000 olan sayılar, 8 ile tam bölünebilir.

* **9 ile bölünebilme kuralı:** Herhangi bir doğal sayının, rakamlarının toplamı 9 veya 9 un katı olan sayılar, 9 ile tam bölünebilir.

* **11 ile bölünebilme kuralı:** Herhangi bir doğal sayının, basamaklarındaki rakamları, sağdan sola doğru birer basamak atlayarak, sayı değerlerini toplayalım. Bu toplamdan arada kalan basamaklardaki rakamların sayı değerleri toplamını çıkaralım. Fark sıfır (0) veya 11 in katı ise bu sayı 11 ile tam bölünebilir.

* Farklı iki sayı ile ayrı ayrı tam bölünebilen bir doğal sayı, bu asal sayıların çarpımı ile de tam bölünebilir.

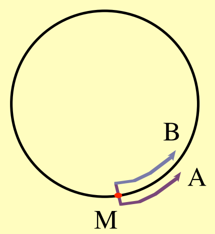
* İki ya da daha çok doğal sayının herbirini tam bölen en büyük sayma sayısına, bu sayıların en büyük ortak böleni denir. (EBOB) şeklinde yazılır.

* İki ya da daha çok doğal sayının ortak katlarından en küçüğüne, bu sayıların en küçük ortak katı denir. (EKOK) şeklinde yazılabilir.

* a ve b doğal sayıları verilsin. $a + c = b$ olacak şekilde bir $c \in N^+$ varsa, a sayısı b sayısından küçüktür denir. $a < b$ şeklinde yazılır.

ALIŞTIRMALAR

1. İki basamaklı bir doğal sayının rakamları yer değiştirildiğinde sayı 54 azalıyor. Bu sayının rakamları farkı kaç olur?
2. "aaa" üç basamaklı sayısı, hangi sayıya daima tam olarak bölünebilir?
3. **"1234a"** beş basamaklı sayısının 6 ile tam bölünebilmesi için "a" yerine hangi rakamlar gelmelidir?
4. 64372 sayısının 11 ile tam olarak bölünüp, bölünemeyeceğini bölme işlemi yapmadan bulunuz.
5. 1 den 1000 e kadar (1000 dahil) olan doğal sayılardan kaç tanesi 2 veya 3 ile tam olarak bölünebilir?
6. "120" sayısını bölebilen, kaç tane doğal sayı vardır?
7. Boyutları 4,2 m ve 3, 8 m olan bir odanın tabanına, kare biçiminde fayanslar döşenecektir. Fayansların birer kenarının uzunluğu, **en fazla** kaç cm olmalıdır?
8. Ali bilyelerini 6 lı kümelere ayırdığında, 5 bilye artıyor. 8 li kümelere ayırdığında, 7 bilye artıyor. 9 lu kümelere ayırdığında, 8 bilye artıyor. Buna göre, Ali'nin **en az** kaç bilyesi vardır?
9. Çembersel bir yolu A hareketlisi 9 dakikada, B hareketlisi 12 dakikada gidiyor. Bu iki hareketli çembersel yol üzerindeki bir M noktasında, aynı anda ve ayrı yönde harekete başlıyor. Hareketliler, harekete başladıkları andan t dakika sonra M noktasında, ilk kez birlikte geçtiklerine göre, t zamanı bulunuz.



10. Bir öğrenci defterine üçgen ve dörtgen çizmektedir. Hepsi 27 tane olan bu şekillerin, köşelerinin sayısı 92 tane olduğuna göre, kaç tane dörtgen çizmiştir?

2. TAM SAYILAR

a. Tanım

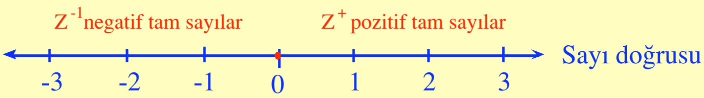
Doğal sayıların birçok problemin çözümünde yetersiz kaldığını görürüz. Bilim insanları, doğal sayılarla çözülemeyen problemleri çözebilmek için sayıları geliştirdiler. Doğal sayıları da kapsayacak şekilde, çıkarma işlemine göre kapalı olan, toplama işlemine göre her elemanın tersi bulunan, daha geniş bir küme tanımladılar. Bu kümeye, tam sayılar kümesi denir. Z ile gösterilir.

$Z^- = \{ ..., -3, -2, -1\}$ kümesine, negatif tam sayılar kümesi,

$Z^+ = \{1, 2, 3, ...\}$ kümesine, pozitif tam sayılar kümesi denir.

Buna göre, $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+ = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ dir.

Tam sayılar kümesini, sayı ekseni üzerinde gösterelim.



Çizilen sayı doğrusunda, sıfırın sağında yer alan sayılar, pozitif tam sayılar kümesinin elemanları, sıfırın solunda yer alan sayılar, negatif tam sayılar kümesinin elemanlarıdır.

Böylece, $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$ olur.

ÖRNEK 1.23

Doğal sayılar kümesinde, $x + 2 = 5$ ve $x + 5 = 2$ denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

$x + 2 = 5$ denkleminin doğal sayılarla çözüm kümesi, $Ç = \{3\}$ tür.
$x + 5 = 2$ denkleminin doğal sayılarda çözüm kümesi, $Ç = \{ \quad \}$ dir.

ÖRNEK 1. 24

Tam sayılar kümesinde, $x + 3 = 1$ ve $x + 5 = 2$ denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

$x + 3 = 1$ denkleminin tam sayılarda çözüm kümesi, $Ç = \{ -2\}$ dir.
$x + 5 = 2$ denkleminin tam sayılarda çözüm kümesi, $Ç = \{-3\}$ tür.

b. Tam Sayılar Kümesinde Toplama İşlemi

Aynı işaretli iki tam sayının toplamı bulunurken, sayılar toplanır. Bu sayının işareti, toplamın işareti olur.

Zıt işaretli iki tam sayı toplanırken, sayı değeri büyük olandan küçük olan çıkarılır. Büyük olanın işareti toplamın işareti olur.

Tam Sayılar Kümesinde Toplama İşleminin Özelikleri

I. Kapalılık Özeliği

Herhangi iki tam sayının toplamı yine bir tam sayıdır. Buna göre, tam sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

II. Değişme Özeliği

Tam sayılar kümesinde toplama işleminin değişme özeliği vardır.

Her $a, b \in Z$ için, $a + b = b + a$ olur.

III. Birleşme Özeliği

Tam sayılar kümesinde toplama işleminin birleşme özeliği vardır.

Her $a, b, c \in Z$ için, $(a + b) + c = a + (b + c)$ dir.

IV. Etkisiz (Birim) Eleman

Tam sayılar kümesinde, sıfır sayısı toplama işlemine göre etkisiz (Birim) elemanıdır.

Her $a \in Z$ için, $a + 0 = 0 + a = a$ olur.

V. Bir Elemanın Tersi

Tam sayılar kümesinde, toplama işlemine göre, her elemanın tersi vardır. Her $a \in Z$ için, $a + b = b + a = 0$ olacak şekilde bir $b \in Z$ vardır. Bu sayıya, toplama işlemine göre a nın tersi denir. - a ile gösterilir.

Sıfır hariç bir tam sayının toplama işlemine göre tersi, o sayının ters işaretlisidir. Sıfırın toplama işlemine göre tersi sıfırdır. Bu özelikleri birer örnekle açıklayalım.

ÖRNEK 1. 25

1. -7 ve + 4 tam sayılarının toplamı, $(-7) + (+4) = -3$ dür.

   -3 sayısı tam sayı olduğundan, toplama işlemine göre kapalıdır.

2. +8 ve -5 sayıları için, (+8) + (-5) = 3 ve (-5) + (+8) = 3 olduğundan, değişme özeliği vardır.
3. -1, 5 ve 8 tam sayıları için, [(-1) + (+5)] + (+8) = (+4) + (+8) = +12 ve (-1) + [(+5) + (+8)] = (-1) + (+13) = +12 olduğundan, birleşme özeliği vardır.
4. +6 ve 0 sayıları için, (+6) + (0) = +6 olduğundan, 0 etkisiz elemandır.
5. +4 ve -4 tam sayıları için, (+4) + (-4) = 0 olduğundan, +4 tam sayısı, -4 tam sayısının, toplama işlemine göre tersidir.

c. Tam Sayılar Kümesinde Çıkarma İşlemi

Tam sayılar kümesinde, bir tam sayı ile bir negatif tam sayının toplamı, birinciden ikincinin çıkarılması anlamında yeni bir işlem çıkarma işlemi olarak kabul edilir.

a, b $\in$ Z olmak üzere, a + (-b) toplamına, a ile b tam sayılarının farkı denir. Bu fark a - b biçiminde gösterilir. İki sayının farkını bulma işlemine de, çıkarma işlemi denir.

ÖRNEK 1. 26

1. 10 ve 4 tam sayılarında çıkarma işlemi, 10 - 4 = 6 dır.
2. -6 ve - 8 tam sayılarında çıkarma işlemi, -6 - (-8) = - 6 + 8 = 2 dir.
3. -11 ve 2 tam sayılarında çıkarma işlemi, -11 - (2) = - 11 - 2 = - 13 tür.

Tam Sayılar Kümesinde Çıkarma İşleminin Özelikleri

I. Kapalılık özeliği vardır.
II. Değişme özeliği yoktur.
III. Birleşme özeliği yoktur.
IV. Birim eleman özeliği yoktur.
V. Ters eleman özeliği yoktur.

Sizde tam sayılar kümesinde çıkarma işlemine ait çeşitli işlemler yapınız. Özelik - lerini örneklerle gösteriniz.

ç. Tam Sayılar Kümesinde Çarpma İşlemi

İki tam sayının çarpımı yapılırken, sayıların işaretine bakılmaksızın çarpılır. Çarpanlar aynı işaretli ise çarpımın işareti pozitif (+) olarak alınır. Çarpanlar zıt işaretli ise çarpımın işareti negatif (-) olarak alınır.

ÖRNEK 1. 27

1. (+5) . (+4) = +20
2. (-9) . (-3) = +27
3. (+7) . (-9) = -63
4. (-8) . (+2) = -16

Tam Sayılar Kümesinde Çarpma İşleminin Özelikleri

I. Kapalılık Özeliği

Herhangi iki tam sayının çarpımı yine bir tam sayıdır. Tam sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

II. Değişme Özeliği

Tam sayılar kümesinde, çarpma işleminin değişme özeliği vardır.

Her $a, b \in Z$ için, $a . b = b. a$ olur.

III. Birleşme Özeliği

Tam sayılar kümesinde, çarpma işleminin birleşme özeliği vardır.

Her $a, b, c \in Z$ için, $(a . b) . c = a. (b . c)$ dir.

IV. Etkisiz (Birim) Eleman

Tam sayılar kümesinde +1, çarpma işlemine göre etkisiz (birim) elemanıdır.

Her $a \in Z$ için, $a . 1 = 1 . a = a$ dır.

V. Bir Elemanın Tersi

Tam sayılar kümesinde $a \neq \pm 1$ olmak üzere, her $a \in Z$ için, $a . x = 1$ olacak şekilde $x \in Z$ yoktur.

O halde, tam sayılar kümesinde, çarpma işleminin ters eleman özeliği yoktur.

ÖRNEK 1. 28

Tam sayılar kümesinde, çarpma işleminin birleşme özeliğinin olduğunu gösterelim.

a = 3, b = -4, c = 5 ise, a . b = (3) . (-4) = - 12

(a . b) . c = (-12) . (5) = - 60 dır.

b. c = (-4) . (5) = - 20 ; a . (b. c) = 3. (-20) = - 60 dır.

O halde, (a . b) . c = a . (b . c) olduğundan,

[(3) . (-4)] . (5) = (3) . [(-4) . (5)]

- 60 = - 60 olur.

O halde, tam sayılar kümesinde çarpma işleminin bileşme özeliği vardır.

ÖRNEK 1.29

Tam sayılar kümesinde, çarpma işleminin ters eleman özeliğinin olmadığını gösterelim.

a = 9 ise 9 . x =1 den, $x = \frac{1}{9}$ olur. $\frac{1}{9} \notin Z$ olduğundan, 9 tam sayısının çarpma işlemine göre, tersi yoktur.

Siz de tam sayılar kümesinde, çarpma işlemine ait çeşitli işlemler yapınız. Bu tam sayılar kümesinde kapalılık, değişme ve etkisiz eleman özeliklerini örneklerle açıklayınız.

d. Tam Sayılar Kümesinde Bölme İşlemi

İki tamsayının bölümü yapılırken, sayıların işaretine bakılmaksızın bölme işlemi yapılır. Bölme işleminde aynı işaretli iki tamsayının bölümü pozitif, ters işaretli iki tam sayının bölümü negatif işaretlidir.

Tam Sayılar Kümesinde Bölme İşleminin Özelikleri

I. Kapalılık özeliği yoktur.

II. Değişme özeliği yoktur.

III. Birleşme özeliği yoktur.

IV. Birim eleman özeliği yoktur.

V. Ters eleman özeliği yoktur.

Sizde tam sayılar kümesinde, bölme işlemine ait çeşitli işlemler yapınız. Bu tam sayılar kümesinde kapalılık, değişme, birleşme özeliklerinin olmadığını örneklerle gösteriniz.

e. Kalanlı Bölme

Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, tam sayılar kümesinde, a tam sayısı, b tam sayısına bölündüğünde, bölüm c tam sayısı, kalan ise negatif olmayan bir k tam sayısıdır.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} b \,.\, c & c \\ \hline k & \end{array}$$

Bölme eşitliği ise, $a = b \,.\, c + k$ dır.

Kalan k tam sayısı, $0 < k \leq | b |$ aralığındadır.

ÖRNEK 1. 30

39 Tam sayısını 4 tam sayısına bölerek, bölümü ve kalanı bulalım. Bölme eşitliğini yazalım.

$$\begin{array}{r|l} 39 & 4 \\ \cline{2-2} -\,36 & 9 \\ \hline 03 & \end{array}$$

Bölüm : 9, Kalan: 3 tür.

Bölme eşitliği : $39 = 4 \,.\, 9 + 3$ olur.

f. Bir Tam Sayının Mutlak Değeri

a tam sayısının mutlak değeri, $| a |$ ile gösterilir.

a pozitif tam sayı ise, $| a | = a$ dır.

$a = 0$ ise, $| a | = | 0 | = 0$ dır.

a negatif tam sayı ise, $| a | = –a$ dır.

ÖRNEK 1. 31

1. $| 6 | = (6)$ dır.
2. $|- 6| = - |-6| = 6$ dır.

g. Tek ve Çift Tam Sayılar

Tam sayılar kümesinin elemanlarından 2 nin katı olanların oluşturduğu küme, çift tam sayılar kümesidir. Bu küme, Ç = { ... - 4, -2, 0, 2, 4, ...} dür.

Tam sayılar kümesinde 2 nin katı olmayan elemanların oluşturduğu küme, tek tam sayılar kümesidir. Bu küme, T = { ..., -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5, ...} dir.

n bir doğal sayı olmak üzere;

..., 2n - 2, 2n, 2n + 2, 2n + 4, ... sayıları ardışık çift sayılardır.

..., 2n - 3, 2n - 1, 2n + 1, 2n + 3, ... sayıları ardışık tek sayılardır.

Tek ve çift tam sayılarda yapılan işlemlerde;

1. İki çift sayının toplamı, çift sayıdır.
2. İki tek sayının toplamı, çift sayıdır.
3. Bir tek bir çift sayının toplamı, tek sayıdır.
4. İki tek sayının çarpımı, tek sayıdır.
5. İki çift sayının çarpımı, çift sayıdır.
6. Bir tek bir çift sayının çarpımı, çift sayıdır.
7. Bir tek sayının kuvveti, tek sayıdır.

ÖRNEK 1. 32

Ardışık 3 tek tam sayının toplamı 99 tür. Bu tam sayılardan büyük olanı bulalım.

Ardışık üç tek tam sayı; 2n + 1, 2n + 3 ve 2n + 5 olsun.

$2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 = 99$; $6n = 99 - 9$; $6n = 90$; $n = 15$ dir.

Büyük olan tam sayıyı bulmak için,

$2n + 5 = 2 (15) + 5 = 30 + 5 = 35$ olur.

ÖRNEK 1.33

Bir tek tam sayının karesinin de bir tek tam sayı olduğunu gösterelim.

a bir tek tam sayı olsun. O zaman, $a = 2n + 1$, $n \in Z$ dir.

$a^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n (n + 1) + 1 = 2 [2n (n + 1] + 1$ ve

$2n (n + 1) = m$ dersek, $m \in Z$ dir.

O halde, $a^2 = 2m + 1$ olur.

Burada, $m \in Z$ olduğundan, bir tek tam sayının karesi de bir tek tam sayıdır.

h. Bir Tam Sayının, Doğal Sayı Kuvveti

a bir tam sayı, n sıfırdan farklı doğal sayı olmak üzere, $a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \ldots a}_{n \text{ tane}}$ ifadesine,

bir tam sayının doğal sayı kuvveti denir.

n çift sayma sayısı ise $(-a)^n = a^n$ dir.

n tek sayma sayısı ise $(-a)^n = -a^n$ dir.

ÖRNEK 1.34

1. $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16 = 2^4$ dir.
2. $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27 = -3^3$ dir.

ı. Tam Sayılarda İşlem Yapma

Aynı veya zıt işaretli tam sayılarla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini ve özeliklerini daha önce gördük.

Bir çok işlemi bir arada bulunduran ifadelerde işlem yaparken, öncelik sırası parantez içindeki ifadelerindir. Sonra sırasıyla kuvvet, çarpma, bölme, toplama ve çıkarma işlemleri yapılır. Buna dikkat edilmez ve parantez kullanılmazsa netice farklı çıkabilir. Şimdi de bunu örneklerle açıklayalım.

I. Bölme işleminin birleşme özeliği olmadığından, a : b : c ifadesindeki işlem anlamsızdır. Tam sayı değeri bulunamaz.

ÖRNEK 1. 35

16 : 4 : 2 ifadesinde, (16 : 4) : 2 şeklinde olursa, 4 : 2 = 2 olur.

16 : 4 : 2 ifadesinde, 16 : (4 : 2) şeklinde olursa, 16 :2 = 8 olur.

O halde, ifadenin sonucu aynı olmuyor. Buna göre, ardışık olarak bölme işlemleri varsa, mutlaka parantez kullanılmalıdır.

II. a . b : c ifadesi anlamlıdır. Çünkü a . (b : c) = (a . b) : c dir.

ÖRNEK 1. 36

16 . 4 : 2 ifadesinde, 16 . (4 : 2) = 16 . 2 = 32 olur.

16 . 4 : 2 ifadesinde, (16 . 4) : 2 = 64 : 2 = 32 olur.

O halde, ifadenin sonucu aynı oluyor.

III. a : b . c yazılışı anlamsızdır. Çünkü (a: b) . c ≠ a : (b . c) dir.

ÖRNEK 1. 37

16 : 4 . 2 ifadesinde, (16 : 4) . 2 = 4 . 2 = 8 dir.

16 : 4 . 2 ifadesinde, 16 : (4. 2) = 16 : 8 = 2 dir.

O halde, ifadenin sonucu aynı olmadından mutlaka parentez kullanılmalıdır.

ÖRNEK 1. 38

1 $[(-3).(+2)] : (-5+2) = (-6) : (-3) = +2$

2 $[(-2^2+3)^3 . 12 + 4] : [2 + (-1)^3] = [(-4+3)^3 . 12 + 4] : (+2-1)$

$= [(-1)^3 . 12 + 4] : (+1) = (-12+4) : (+1) = (-8) : (+1) = -8$

3 $3(x-y) + 5(y-x) + (-y)^2 = 3x - 3y + 5y - 5x + y^2 = -2x + 2y + y^2$

ÖRNEK 1. 39

$\frac{3m+8}{m}$ ifadesini tam sayı yapan, m doğal sayılarının toplamını hesaplayalım.

$\frac{3m+8}{m} = \frac{3m}{m} + \frac{8}{m} = 3 + \frac{8}{m}$ dir.

Verilen ifadenin doğal sayı olabilmesi için, $\frac{8}{m}$ doğal sayı olmalıdır. Bunun için, m nin değerleri 8 in doğal sayı bölenleridir. Bunlarda, 1, 2, 4, ve 8 dir.

O halde, istenen toplam 1+ 2 + 4 + 8 = 15 olur.

ÖRNEK 1. 40

Bir kırtasiyeci, 5 tanesini 3000 kuruştan aldığı defterlerin, 3 tanesini 5000 kuruştan satarak 640 lira kazanmıştır. Buna göre, kırtasiyeci kaç tane defter satmıştır?

Kırtasiyeci defterleri 3 lü ve 5 li kümelere ayırabildiğine göre, defterlerin sayısı 15 in katıdır. Bu defterlerin 15 tane olduğunu düşünelim.

15 : 5 = 3	(küme)
3 x 3000 = 9000 kuruş	(Defterlerin alış fiyatı)
15 : = 5	(küme)
5 x 5000 = 25000 kuruş	(Defterlerin satış fiyatı)
25000 - 9000 = 16000 kuruş	(15 defterden yapılan kâr)
640 lira = 64000 kuruş	
64000 : 16000 = 4	(Katı)
15 x 4 = 60 tane	(Defterlerin sayısı)

i. Grup

Bir A kümesi ile bu küme üzerinde tanımlı bir Δ işlemi verilsin. A kümesi Δ işlemiyle birlikte, aşağıdaki dört özeliği sağlıyorsa (A, Δ) sistemine bir grup denir.

I. A kümesi, Δ işlemine göre kapalıdır.

Her a, b ∈ A için, a Δ b ∈ A dır.

II. A kümesinde, Δ işleminin birleşme özeliği vardır.

Her a, b, c ∈ A için, a Δ (b Δ c) = (a Δ b) Δ c dir.

III. A kümesinde, Δ işlemine göre birim eleman vardır.

Her a ∈ A için, a Δ e = e Δ a = a dır. e ∈ A ise e birim elemanıdır.

IV. A kümesinde, Δ işlemine göre, A kümesinin her elemanın tersi vardır.

Her a ∈ A için, a Δ b = b Δ a = e olacak şekilde bir b ∈ A vardır.

ÖRNEK 1. 41

Doğal sayılar kümesi ile, bu küme üzerinde tanımlanan toplama işleminin oluşturduğu (N, +) sisteminin, bir grup olup olmadığını araştıralım.

Bunun için (N, +) sisteminin grup olma şartlarını sağlayıp sağlamadığına bakmalıyız.

I. Her a, b $\in$ N için, (a + b) $\in$ N dir. İki doğal sayının toplamı yine bir doğal sayı olduğundan, doğal sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

II. Her a, b, c $\in$ N için, a + (b + c) = (a + b) + c olduğundan, doğal sayılar kümesinde toplama işleminin birleşme özeliği vardır.

III. Her a $\in$ N için, a + 0 = 0 + a = a olduğundan, doğal sayılar kümesinde toplama işleminin etkisiz elemanı 0 (sıfır) dır.

IV. Sıfırdan farklı hiçbir doğal sayının, toplama işlemine göre ters elemanı yoktur. 5 sayısının toplama işlemine göre ters elemanı -5 sayısıdır. -5 sayısı doğal sayı olmadığından, doğal sayılar kümesinde toplama işlemine göre ters eleman yoktur.

O halde, doğal sayılar kümesi toplama işlemine göre grup değildir.

ÖRNEK 1.42

Tam sayılar kümesi ile üzerinde tanımlı toplama işlemi, istenilen özelikleri sağladığından grup oluşturur. (Z, +) sistemi bir gruptur.

Tam sayılar kümesinde toplama işleminin, değişme özeliği de vardır. Değişme özeliği olan gruplara değişmeli grup denir. O halde, (Z, +) sistemi değişmeli bir gruptur.

ÖRNEK 1. 43

Tam sayılar kümesi çarpma işlemine göre (Z, .) sisteminin bir grup olup olmadığını araştıralım.

I. Her a, b $\in$ Z için, (a . b) $\in$ Z olduğundan, tam sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

II. Her a, b, c $\in$ Z için, a. (b. c) = (a . b) . c olduğundan, tam sayılar kümesinde çarpma işlemin birleşme özeliği vardır.

III. Her a $\in$ Z için, a . 1 = 1 . a = a olduğundan, tam sayılar kümesinde çarpma işleminin etkisiz elemanı 1 dir.

IV. Bazı tam sayıların çarpma işlemine göre ters elemanı yoktur.

O halde, tam sayılar kümesi çarpma işlemine göre grup değildir. (Z, .) sistemi grup değildir.

ÖZET

- Doğal sayıları da kapsayacak şekilde, çıkarma işlemine göre kapalı olan, toplama işlemine göre, her elemanın tersi bulunan, daha geniş bir küme tanımlandığında, bu kümeye tam sayılar kümesi denir. Z ile gösterilir.

  $Z^- = \{ ..., -3, -2, -1\}$ kümesine, negatif tam sayılar kümesi,

  $Z^+ = \{1, 2, 3, ...\}$ kümesine, pozitif tam sayılar kümesi denir.

  Buna göre, $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+ = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ dir.

- Aynı işaretli iki tam sayının toplamını bulurken, sayılar toplanır. Bu sayının işareti, toplamın işareti olur. Zıt işaretli iki tam sayı toplanırken, sayı değeri büyük olandan küçük olan çıkarılır. Toplama büyük olanın işareti verilir.

- $a, b \in Z$ olmak üzere, $a + (-b)$ toplamına a ile b tam sayılarının farkı denir. Bu fark, $a - b$ biçiminde gösterilir. İki sayının farkını bulma işlemine de çıkarma işlemi denir.

- İki tam sayının çarpımı yapılırken, sayıların işaretine bakılmaksızın çarpılır. Çarpanlar aynı işaretli ise çarpımın işareti pozitif (+) olarak alınır. Çarpanlar zıt işaretli ise çarpımın işareti negatif (-) olarak alınır.

- İki tam sayının bölümü yapılırken, sayıların işaretine bakılmaksızın bölme işlemi yapılır. Bölme işleminde aynı işaretli iki tam sayının bölümü pozitif, ters işaretli iki tam sayının bölümü negatif işaretlidir.

- Kalanlı bir bölme işleminde a tam sayısı, b tam sayısına bölündüğünde bölüm c tam sayısı, kalan ise negatif olmayan bir k tam sayısıdır. Bölme eşitliği ise $a = b . c + k$ dır.

- a tam sayısının mutlak değeri $| a |$ ile gösterilir. a pozitif tam sayı ise $| a | = a$ dır. $a = 0$ ise $| a | = | 0 | = 0$ dır. a negatif tam sayı ise $| a | = - a$ dır.

- Tam sayılar kümesinin elemanlarından, 2 nin katı olanların oluşturduğu kümeye, çift tam sayılar kümesi denir. Tam sayılar kümesinde 2 nin katı olmayan elemanların oluşturduğu kümeye, tek tam sayılar kümesi denir.

a bir tam sayı, n sıfırdan farklı doğal sayı olmak üzere, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tane}}$ ifadesine, bir tam sayının, doğal sayı kuvveti denir.

- Bir çok işlemi bir arada bulunduran ifadelerde işlem yaparken, öncelik sırası parantez içindeki ifadelerindir. Sonra sırasıyla kuvvet, çarpma, bölme, toplama ve çıkarma işlemleri yapılır.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

   a. $(-2) + 6 - (-3) + 5 - 8$

   b. $[(1 - (-4)] [- (5 - 6) + (-3 + 7)]$

   c. $[9 - 2 (2 - 3)] : [- (3 + 7) - (-3)]$

   ç. $2 + 3 . [5 - 8 : (6 - 2)]$

   d. $2 - 26 : [1 + 3 - (2 + 2)]$

2. 41a2 sayısı 3 ile tam olarak bölünebildiğine göre, sayının onlar basamağındaki “a” yerine yazılabilecek rakamların toplamı kaçtır?

3. Birbirinden farklı üç basamaklı dört tam sayının toplamı 3500 dür. Bunlardan en küçüğü **en az** kaç olabilir?

4. Bir a tam sayısının 41 ile bölümünde bölüm 40 kalan 38 oluyor. Bu sayının 8 ile bölümünden kalan kaçtır?

5. Bir manav karpuzların tanesini 1500 kuruştan satarsa 20000 kuruş zarar, tanesini 2000 kuruştan satarsa 20000 kuruş kâr ediyor. Buna göre, manavın kaç karpuzu vardır?

6. a ve b pozitif tam sayılardır. $a + 2b = 15$ eşitliğinde “a” nın alabileceği, **en küçük** ve **en büyük** değerleri kaçtır?

7. $\dfrac{a + 7}{a + 2}$ ifadesini tam sayı yapan, “a” nın tamsayı olarak alabileceği değerleri bulunuz.

8. Bir tam sayının 9 eksiğinin 3 katı ile kendisinin 5 fazlası toplanıyor. Toplam 58 olduğuna göre, bu tam sayı kaçtır?

9. $A = \{ -1, 1\}$ kümesi üzerinde tanımlanan çarpma işlemi, bir değişmeli grup oluşturur mu? Neden?

10. Çift tam sayılar kümesi $Ç = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$ veriliyor. $(Ç, +)$ sistemi değişmeli grup mudur? Neden?

3. MODÜLER ARİTMETİK

"Saat aritmetiği" de diyeceğimiz bu bölümde, bildiğimiz toplama ve çarpmadan farklı yeni bir toplama ve çarpma işlemlerini göreceğiz.

ÖRNEK 1.44

Gece saat 10 da yatan ve 9 saat uyuyan Ali, sabah saat kaçta kalkmıştır?

Bu problemin çözümü, 10 + 9 = 19 dur.

Saat üzerinde 19 yoktur. Saat üzerinde 10 dan itibaren 9 birim sayarsak 7 olduğunu görürüz. Saat üzerindeki rakamlarla toplama işlemi 10 + 9 = 7 olur.

Bu ve bunun gibi işlemler, modüler aritmetik dalının konusudur.

a. Tanım

a ve b tamsayıları verilen bir m pozitif tamsayısına bölündüklerinde, aynı kalanı verirse "a tam sayısı, b tam sayısına, m modülüne göre denktir" denir. $a \equiv b \pmod{m}$ şeklinde gösterilir.

$a \equiv b \pmod{m}$ ifadesi aynı zamanda a - b, m ile bölünür. Ya da m, a - b yi böler şeklinde de ifade edilir.

ÖRNEK 1.45

$$\begin{array}{r|l} 3 & 5 \\ \cline{2-2} -0 & 0 \\ \hline 3 \text{ kalan} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 33 & 5 \\ \cline{2-2} -30 & 6 \\ \hline 3 \text{ kalan} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 5 \\ \cline{2-2} -45 & 9 \\ \hline 3 \text{ kalan} & \end{array}$$

$3 = 5 \,.\, 0 + 3$ $\qquad$ $33 = 5 \,.\, 6 + 3$ $\qquad$ $48 = 5 \,.\, 9 + 3$

$3 \equiv 3 \pmod{5}$ $\qquad$ $33 \equiv 3 \pmod{5}$ $\qquad$ $48 \equiv 3 \pmod{5}$

Burada 3, 33 ve 48 tam sayılarının, 5 ile bölünmesinden elde edilen kalanlar 3 e eşittir. 5 e bölündüğünde 3 kalanını veren başka tam sayılar da vardır.

Bu durumda, 5 in kalan sınıflarına göre, 3, 33 ve 48 sayıları denktir.

Örnek 1.45'de olduğu gibi, tam sayılar kümesinde, $\beta = \{(a, b) \mid$ a ve b nin 5 ile bölünmesinden elde edilen kalanlar aynıdır.$\}$ bağıntısı ile tanımlanır. Bunu genelleştirirsek, tam sayılar kümesi üzerinde her $m \in Z^+$ için, $\beta = \{(a, b) \mid$ a - b, m ile bölünür.$\}$ bağıntısı vardır.

Bu bağıntının, bir denklik bağıntısı olduğunu gösterelim.

1. Her $a \in Z$ için, $(a, a) \in \beta$ (Yansıma)
2. Her $a, b \in Z$ için, $(a, b) \in \beta$ ise $(b, a) \in \beta$ (Simetri)
3. Her $a, b, c \in Z$ için, $(a, b) \in \beta$ ve $(b, c) \in \beta$ ise $(a, c) \in \beta$ dir. (Geçişme)

Bu özeliklere göre, β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

β denklik bağıntısı, tam sayılar kümesini denklik sınıflarına ayırır.

Bir a tam sayısı 5 e bölündüğünde kalan 0, 1, 2, 3, 4 sayılarından biri olur. Buna göre, tam sayılar kümesi 5 modülüne göre, $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ kalanlar sınıflarına (denklik sınıflarına) ayırır.

Tam sayılar kümesinde, 5 modülüne göre kalan sınıfları;

$\overline{0} = \{..., \overline{-10}, \overline{-5}, \overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, ...\}$

$\overline{1} = \{..., \overline{-9}, \overline{-4}, \overline{1}, \overline{6}, \overline{11}, ...\}$

$\overline{2} = \{..., \overline{-8}, \overline{-3}, \overline{2}, \overline{7}, \overline{12}, ...\}$

$\overline{3} = \{..., \overline{-7}, \overline{-2}, \overline{3}, \overline{8}, \overline{13}, ...\}$

$\overline{4} = \{..., \overline{-6}, \overline{-1}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{14}, ...\}$

5 modülüne göre, kalan sınıflarının kümesi Z / 5 ile gösterilir.

$Z/5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ olur.

m pozitif tam sayı olmak üzere, tam sayılar kümesi, m modülüne göre;

$\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{(m-1)}$ kalan sınıflarına (denklik sınıflarına) ayrılır.

m modülüne göre, kalan sınıflarının (denklik sınıflarının) kümesi,

$Z/m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, ..., \overline{(m-1)}\}$ dir.

m modülüne göre, kalan sınıfları kümesinde a ile b aynı kalan sınıfa ait ise, $a \equiv b \pmod{m}$ şeklinde yazılır.

Buna göre, aşağıdaki açıklamaları yapabiliriz.

1. $a \equiv b \pmod{m}$ ise a ve b aynı kalan sınıfına aittir.
2. $a \equiv b \pmod{m}$ ise a ile b nin farkı, m ile tam bölünür.
3. $a \equiv k \pmod{m}$ ve $0 \leq k < m$ ise a nın, m ile bölünmesinden kalan k dır.
4. $a \equiv 0 \pmod{m}$ ise a sayısı m ile tam bölünür.

ÖRNEK 1.46

Tam sayılar kümesinin 3, 4 ve 6 ile bölünmesinden elde edilen kalan sınıflarının kümesini ayrı ayrı yazalım.

$Z/3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ dir.

$Z/4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ tür.

$Z/6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ dir.

ÖRNEK 1.47

Tam sayılarda 2 ile bölündüğünde, elde edilen kalan sınıflarını ve $Z/2$ kümesini yazalım.

Kalan sınıfları:

$\overline{0} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ ve $\overline{1} = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$ dir.

$Z/2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ olur.

b. Tam Sayılar Kümesinde Modüle Göre, Kalan Sınıfların Özelikleri

1. Kalan sınıflar tam sayılar kümesinin, ikişer ikişer ayrık alt kümeleridir.

$\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{(m-1)}$ kümeleri m modülüne göre, kalan sınıflar olsun.

2. Kalan sınıflarının birleşimi, tam sayılar kümesini verir.

$\overline{0} \cap \overline{1} = \varnothing, \ldots, \overline{1} \cap \overline{2} = \varnothing, \ldots, \overline{(m-2)} \cap \overline{(m-1)} = \varnothing$ dir.

3. Kalan sınıflarının hiçbiri, boş küme değildir.

$\overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \ldots, \cup \overline{(m-1)} = Z$ dir.

c. Teoremler

Her a, b, c, d, x $\in$ Z ve m, n $\in Z^+$, m > 1 için;

a ≡ b (mod m) ve c ≡ d (mod m) ise,

1, a ± c ≡ b ± d (mod m)

2. a . c ≡ b . d (mod m)

3. a ± x ≡ b ± x (mod m)

4. a . x ≡ b . x (mod m)

5. $a^n \equiv b^n$ (mod m)

Bu teoremleri ispat etmeden, örneklerle doğruluğunu gösterelim.

ÖRNEK 1.48

54 ≡ 2 (mod 4) ve 69 ≡ 1 (mod 4) ise taraf tarafa toplarsak,

(54 + 69) ≡ (2 + 1) (mod 4)

123 ≡ 3 (mod 4) olur.

ÖRNEK 1.49

29 ≡ 1 (mod 7) ve 33 ≡ 5 (mod 7) ise taraf tarafa çarparsak,

(29. 33) ≡ (1 . 5) (mod 7)

957 ≡ 5 (mod 7) olur.

ÖRNEK 1.50

5^{24} sayısını, 7 ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulalım.

$$\left.\begin{array}{rl} & 5^2 \equiv 4 \pmod 7 \\ \times & 5^4 \equiv 2 \pmod 7 \end{array}\right\} \text{Taraf tarafa toplarsak}$$

$$5^2 \cdot 5^4 \equiv 4 \cdot 2 \pmod 7$$

$$5^6 \equiv 1 \pmod 7$$

$$\left(5^6\right)^4 \equiv 1^4 \pmod 7$$

$$5^{24} \equiv 1 \pmod 7$$

Buna göre, 5^{24} sayısının 7 ile bölünmesinden kalan 1 dir.

ç. Kalan Sınıflar Kümesinde Toplama ve Çarpma İşlemleri

m, pozitif tam sayı olmak üzere, m modülüne göre, kalan sınıflarının kümesi;

$Z/m = \{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3}, ..., (\overline{m-1})\}$ dir.

Kalan sınıfları kümesinde, toplama işlemi $\oplus$ sembolü ile, çarpma işlemi $\odot$ sembolü ile gösterilir.

$\overline{a}, \overline{b} \in Z/m$ olduğuna göre,

1. Toplama işlemi : $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b}$ dir.
2. Çarpma işlemi: $\overline{a} \odot \overline{b} = \overline{a\,.\,b}$ dir.

ÖRNEK 1.51

$Z/5$ kümesinde, toplama ve çarpma işlemleri yaparsak, $Z/5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ dir.

Kalanlar sınıfı kümesindeki, $\overline{2}$ ve $\overline{4}$ sayıları için,

1. Toplama işlemi : $\overline{2} \oplus \overline{4} = \overline{6} = \overline{1}$ olur.
2. Çarpma işlemi: $\overline{2} \odot \overline{4} = \overline{2\,.\,4} = \overline{8} = \overline{3}$ olur.

ÖRNEK 1.52

$Z/7$ kümesinde, toplama ve çarpma işlemleri yaparsak,

$Z/7 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$ dir. Buna göre, bazı sayılar için,

$\overline{3} \oplus \overline{5} = \overline{3+5} = \overline{8} = \overline{1}$ dir.

$\overline{6} \oplus \overline{4} = \overline{6+4} = \overline{10} = \overline{3}$ tür.

$\overline{3} \odot \overline{6} = \overline{3\,.\,6} = \overline{18} = \overline{4}$ tür.

$\overline{5} \odot \overline{4} = \overline{5\,.\,4} = \overline{20} = \overline{6}$ dır.

d. Kalan Sınıflar Kümesinde Toplama ve Çarpma İşleminin Özelikleri

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in Z/m$ olmak üzere, $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri için aşağıdaki özelikler vardır.

1. Kapalılık özeliği vardır.

$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b} \in Z/m$

$\overline{a} \odot \overline{b} = \overline{a\,.\,b} \in Z/m$

2. Değişme özeliği vardır.

$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{b} \oplus \overline{a}$

$\overline{a} \odot \overline{b} = \overline{b} \odot \overline{a}$

3. Birleşme özeliği vardır.

$\overline{a} \oplus (\overline{b} \oplus \overline{c}) = (\overline{a} \oplus \overline{b}) \oplus \overline{c}$

$\overline{a} \odot (\overline{b} \odot \overline{c}) = (\overline{a} \odot \overline{b}) \odot \overline{c}$

4. Birim (etkisiz) elemanı vardır.

$\overline{0} \oplus \overline{x} = \overline{x} \oplus \overline{0} = \overline{x}$

$\overline{1} \odot \overline{x} = \overline{x} \odot \overline{1} = \overline{x}$

5. Toplama işleminin ters elemanı vardır.

$\overline{x} \oplus (\overline{-x}) = (\overline{-x}) \oplus \overline{x} = \overline{0}$ ($\overline{x}$ in tersi $\overline{-x}$ dir.)

Bu özelliklerden yararlanarak, $(Z/m, \oplus)$ sistemi değişmeli bir gruptur.

6. $\odot$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerinde sağdan ve soldan dağılma özeliği vardır.

$\overline{a} \odot (\overline{b} \oplus \overline{c}) = (\overline{a} \odot \overline{b}) \oplus (\overline{a} \odot \overline{c})$

$(\overline{a} \oplus \overline{b}) \odot \overline{c} = (\overline{a} \odot \overline{c}) \oplus (\overline{b} \odot \overline{c})$

ÖRNEK 1.53

$Z/5=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\}$ kümesinde, toplama ve çarpma işlemlerinin tablosunu yaparak, elemanlarının terslerini bulalım.

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

$\odot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Tablodan da görüldüğü gibi,

$\oplus$ işlemine göre,

$\overline{0}$ tersi $\overline{0}$; $\overline{1}$ in tersi $\overline{4}$; $\overline{2}$ in tersi $\overline{3}$; $\overline{3}$ ün tersi $\overline{2}$; $\overline{4}$ ün tersi $\overline{1}$ dir.

$\odot$ işlemine göre,

$\overline{1}$ in tersi $\overline{1}$; $\overline{2}$ in tersi $\overline{3}$; $\overline{3}$ ün tersi $\overline{2}$; $\overline{4}$ ün tersi $\overline{4}$ dür.

Sıfırın çarpma işlemine göre tersi yoktur.

ÖRNEK 1.54

Yukarıdaki Örnek 1.53 de çizdiğimiz $Z/5$ kalan sınıfları kümesinde, toplama ve çarpma tablosundan faydalanarak, $\overline{2}\odot(\overline{4}\oplus\overline{4})$ ifadesinin sonucunu bulalım.

$Z/5$ kalan sınıfları kümesinde toplama ve çarpma tablolarına göre,

$\overline{2}\odot(\overline{4}\oplus\overline{4})=\overline{2}\odot\overline{3}=\overline{1}$ olur.

e. Çeşitli Örnekler

ÖRNEK 1.55

3^{76} ın 5 ile bölümünden elde edilecek kalanın kaç olduğunu bulalım.

$3 \equiv 3 \pmod 5$

$3^2 \equiv 4 \pmod 5$

$3^4 \equiv 1 \pmod 5$

$\left(3^4\right)^{19} \equiv 1^{19} \pmod 5$

$3^{76} \equiv 1 \pmod 5$

O halde, 3^{76} ın 5 ile bölümünde kalan 1 olur.

ÖRNEK 1.56

7^{124} ın birler basağındaki rakamı bulalım.

$7 \equiv 7 \pmod{10}$

$7^2 \equiv 9 \pmod{10}$

$7^4 \equiv 1 \pmod{10}$

$\left(7^4\right)^{31} \equiv 1^{31} \pmod{10}$

$7^{124} \equiv 1 \pmod{10}$

Aynı modüllü iki denklik taraf tarafa çarpılabileceğinden,

$$\begin{array}{ll} & 7^{124} \equiv 1 \pmod{10} \\ \times & 7^2 \equiv 9 \pmod{10} \\ \hline & 7^{126} \equiv 9 \pmod{10} \end{array}$$

O halde, 7^{126} ın birler basamağındaki rakamı 9 olur.

ÖRNEK 1.57

$Z/3$ te $(\overline{2} \odot \overline{x}) \oplus \overline{1} = \overline{0}$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$(\overline{2} \odot \overline{x}) \oplus \overline{1} \oplus \overline{2} = \overline{0} \oplus \overline{2}$ ($Z/3$ te $\overline{1}$ in toplama işlemine göre ters elemanı $\overline{2}$ dir.)

$\overline{2} \odot \overline{x} \oplus \overline{0} = \overline{2}$ ($Z/3$ te $\overline{1} \oplus \overline{2} = \overline{0}$ olur.)

$\overline{2} \odot \overline{x} = \overline{2}$ ($Z/3$ te $\overline{0}$ toplama işleminin etkisiz elemanıdır.)

$\overline{2} \odot \overline{2} \odot \overline{x} = \overline{2} \odot \overline{2}$ ($Z/3$ te $\overline{2}$ nin çarpma işlemine göre ters elemanı $\overline{2}$ dir.)

$1 \odot x = 1$

$x = 1$

O halde, denklemin çözüm kümesi $Ç = \{\overline{1}\}$ dir.

ÖRNEK 1.58

m bir doğal sayı olduğuna göre, 13^{2m+1} sayısının 5 ile bölümündeki kalanı bulalım.

$13 \equiv 3 \pmod 5$

$13^2 \equiv 4 \pmod 5$

$13^4 \equiv 1 \pmod 5$

$(13^4)^{2m} \equiv 1^{2m} \pmod 5$

$13^{8m} \equiv 1 \pmod 5$

x $13 \equiv 3 \pmod 5$

$13^{8m+1} \equiv 3 \pmod 5$

O halde, 13^{8m+1} sayısının 5 ile bölümünde kalan 3 olur.

ÖRNEK 1.59

Z / 6 da karekökü olan sayıları bulalım.

$a \in Z/6$ için, $Z/6=\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ olduğundan, $b \odot b = b^2 = a$ şartını sağlayan bir $b \in Z/6$ sayısı bulunuyorsa, $b = \sqrt{a}$ olur.

$\overline{0}$ için, $\overline{0} \odot \overline{0} = \overline{0}$ ise $\sqrt{\overline{0}} = \overline{0}$ dır.

$\overline{1}$ için, $\overline{1} \odot \overline{1} = \overline{1}$ ise $\sqrt{\overline{1}} = \overline{1}$ dir.

$\overline{2}$ için, $\overline{2} \odot \overline{2} = \overline{4}$ ise $\sqrt{\overline{4}} = \overline{2}$ dir.

$\overline{3}$ için, $\overline{3} . \overline{3} = \overline{3}$ ise $\sqrt{\overline{3}} = \overline{3}$ tür.

$\overline{4}$ için, $\overline{4} \odot \overline{4} = \overline{4}$ ise $\sqrt{\overline{4}} = \overline{4}$ dür.

$\overline{5}$ için, $\overline{5} \odot \overline{5} = \overline{1}$ ise $\sqrt{\overline{1}} = \overline{5}$ dir.

ÖZET

- a ve b tam sayıları verilen bir m pozitif tam sayısına bölündüklerinde, aynı kalanı verirse a tam sayısı, b tam sayısına, m modülüne göre denktir. $a \equiv b \pmod{m}$ şeklinde gösterilir. Biz bunu, $\beta = \{(a, b) \mid a - b, m \text{ ile bölünür}\}$ bağıntısı ile de gösterebiliriz. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. β denklik bağıntısı, tam sayılar kümesini denklik sınıflarına ayırır. m modülüne göre, denklik sınıflarının kümesi Z / m ile gösterilir.

- Tam sayılar kümesinde modüle göre, kalan sınıfların özelikleri:

1. Kalan sınıfların tam sayılar kümesinin, ikişer ikişer ayrık alt kümeleridir.
2. Kalan sınıfların birleşimi tam sayılar kümesini verir.
3, Kalan sınıflarının hiçbiri boş küme değildir.

- Modüler aritmetiğe ait aşağıdaki teoremler vardır.

  Her $a, b, c, d, x \in Z$ ve $m, n \in Z^+$, $m > 1$ için;

  $a \equiv b \pmod{m}$ ve $c \equiv d \pmod{m}$ ise;

1. $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$
2. $a \,.\, c \equiv b \,.\, d \pmod{m}$
3. $a \pm x \equiv b \pm x \pmod{m}$
4. $a \,.\, x \equiv b \,.\, x \pmod{m}$
5. $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

- Kalan sınıflar kümesinde toplama ve çarpma işlemleri için, m pozitif tamsayı olmak üzere, m modülüne göre, kalan sınıflarının kümesi

  $Z / m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, ..., \overline{(m - 1)}\}$ dir.

  Kalan sınıfları kümesinde, toplama işlemleri $\oplus$ sembolü ile, çarpma işlemleri $\odot$ sembolü ile gösterilir.

1. Toplama işlemi: $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a + b}$ dir.

2. Çarpma işlemi: $\overline{a} \odot \overline{b} = \overline{a \,.\, b}$ dir.

- Kalan sınıflar kümesinde, toplama ve çarpma işlemleri ile teoremlerden faydalanarak, işlemlerimizi yapabiliriz.

- Kalan sınıflar kümesinde, toplama ve çarpma işlemlerinde, $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in Z/m$ olmak üzere, $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri için aşağıdaki özelikler vardır.

1. Kapalık özeliği vardır.
2. Değişme özeliği vardır.
3. Birleşme özeliği vardır.
4. Birim (etkisiz) elemanı vardır.
5. Toplama işleminin ters elemanı vardır.
6. $\odot$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerinde sağdan ve soldan dağılma özeliği vardır.

Bu özeliklerden yararlanarak, $(Z/m, \oplus)$ sistemi değişmeli bir gruptur diyebiliriz.

$(Z/m, \odot)$ sistemi ise bir grup değildir. Çünkü bazı tam sayıların çarpma işlemine göre ters elemanı yoktur.

ALIŞTIRMALAR

1. 5^{33} ün 7 ye bölümünden, elde edilecek kalanı bulunuz.

2. 3^{4k+3}, $(k \in N)$ sayısının, 5 ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulunuz.

3. $2^{21} \,.\, 5^{13} . + 3 \,.\, 32^{12}$ sayısının , 7 ile bölünmesinden elde edilen kalan kaçtır?

4. $17 \equiv 13 \pmod 5$ ifadesi doğru mudur? Neden?

5. $(217)^{63}$ sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?

6. $Z / 3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ kümesinde, toplama ve çarpma işlemlerinin tablolarını yapınız.

   Bu tablodan faydalanarak, Z/ 3 de;

   a. Toplama işlemine göre, $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$ elemanlarının tersini yazınız.

   b. Çarpma işlemine göre, $\overline{1}$ ve $\overline{2}$ elemanlarının tersini yazınız.

7. Z / 4 ün toplama ve çarpma tablolarını yapınız. Bu tablolardan faydalanarak aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a. $\overline{x} \oplus \overline{3} = \overline{1}$

   b. $\overline{2} \odot \overline{x} = \overline{0}$

   c. $\overline{3} \odot \overline{x} \oplus \overline{1} = \overline{0}$

8. Z / 6 da, $\overline{3} \odot \overline{x} = \overline{3}$ denkleminin çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

9. $Z / 5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ kümesinde bir f fonksiyonu, $f(x) = \overline{4} \odot x \oplus \overline{3}$ ile veriliyor. $f(\overline{2})$ ifadesi hangi denklik sınıfına eşittir?

10. x = 5 (mod7) denklemini sağlayan en büyük negatif tam sayı ile, en küçük pozitif tam sayının toplamı kaçtır?

RASYONEL SAYILAR

Tam sayılar kümesi bölme işlemine göre kapalı değildir. Bu nedenle $4 . x = 5$ denkleminin çözüm kümesini tam sayılarda bulamayız. Bu tür denklemleri çözmek için, yeni bir kümeye ihtiyaç vardır. Aradığımız küme, tam sayılar kümesini de içine alan ve tam sayılar kümesinden daha geniş olan bir küme olmalıdır. Bu küme rasyonel sayılar kümesidir.

a. Tanım

p ve q birer tam sayı ve $q \neq 0$ olmak üzere, $\frac{p}{q}$ şeklindeki sayılara, rasyonel sayılar denir.

Rasyonel sayılardan oluşan kümeye, rasyonel sayılar kümesi denir. Q ile gösterilir.

$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p.\ q \in Z \text{ ve } q \neq 0 \right\}$ dır.

$\frac{p}{q}$ kesrinde, p ye pay, q ya da payda denir.

$p < q$ ise $\frac{p}{q}$ kesrine basit kesir ; $p \geq q$ ise $\frac{p}{q}$ kesrine, bileşik kesir denir.

$q = 1$ olması hâlinde, $\frac{p}{q} = p \in Z$ tam sayı olur.

ÖRNEK 1.60

$\frac{1}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{7}, \frac{2}{5}$ gibi sayılar birer rasyonel sayıdır.

$\frac{7}{9}$ rasyonel sayının payı 7, paydası 9 dur.

b. Rasyonel Sayıların Eşitliği

$\frac{p}{q} \in Q$ ve $\frac{r}{s} \in Q$ olmak üzere, $p . s = q . r$ ise bu iki rasyonel sayı birbirine eşittir denir. Bu eşitlik, $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ biçiminde yazılır.

O halde, $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ ise $p . s = q . r$ dir.

ÖRNEK 1.61

$\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$ ise $2 \,.\, 12 = 6.\, 4$; $24 = 24$ olduğundan, rasyonel sayılar eşittir.

$\frac{1}{3}$ ile $\frac{5}{8}$ rasyonel sayıları için, $1 \,.\, 8 \neq 3.\, 5$; $8 \neq 15$ olduğundan, $\frac{1}{3} \neq \frac{5}{8}$ olur.

Kesirler arasında eşitlik bağıntısı, kesirler kümesinde bir denklik bağıntısıdır. Buna göre, aşağıdaki özelikleri sağlar.

1. $\frac{p}{q} = \frac{p}{q}$ (Yansıma özeliği)

2. $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ ise $\frac{r}{s} = \frac{p}{q}$ (Simetri özeliği)

3. $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ ve $\frac{r}{s} = \frac{m}{n}$ ise $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ (Geçişme özeliği)

Bir kesrin pay ve paydası, aynı sayma sayısı ile çarpılırsa kesir genişletilmiş, bölünürse sadeleştirilmiş olur. Genişletme ve sadeleştirme işlemlerinin her ikisinde de kesrin değeri değişmez. Bir tek $\frac{p}{q}$ kesrinin genişletme ya da sadeleştirme ile elde edilebilen bütün denk kesirlerin kümesi, bir tek büyüklüğü ifade eder.

c. Rasyonel Sayılar Kümesinde Toplama İşlemi

1. Paydaları eşit olan iki rasyonel sayı toplanırken, payların toplamı pay, payda da payda olarak yazılır.

   $\frac{p}{q}, \frac{r}{q} \in Q$ olmak üzere toplama işlemi, $\frac{p}{q} + \frac{r}{q} = \frac{p+r}{q}$ dür.

2. Paydaları eşit olmayan rasyonel sayılarda ortak payda, paydaların e.k.o.k dur. Buna göre, paydaları eşit olmayan rasyonel sayıları toplayabilmek için, önce paydaları eşitlenir. Sonra paylar toplanarak toplama pay, payda da payda olarak yazılır.

ÖRNEK 1.62

1. $\frac{3}{11} + \frac{5}{11} = \frac{3+5}{11} = \frac{8}{11}$

2. $\underset{(6)}{\frac{5}{5}} + \underset{(5)}{\frac{5}{6}} = \frac{30}{30} + \frac{25}{30} = \frac{55}{30}$

Toplama İşleminin Özelikleri

1. Kapalılık özeliği vardır.

Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için, $\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) \in Q$ dur.

2. Değişme özeliği vardır.

Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için, $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}$ dur.

3. Birleşme özeliği vardır.

Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}, \frac{m}{n} \in Q$ için, $\frac{p}{q} + \left(\frac{r}{s} + \frac{m}{n}\right) = \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) + \frac{m}{n}$ dir.

4. Birim elemanı vardır.

Birim elemanı, $e = \frac{0}{1} = 0$ dır.

Her $\frac{p}{q} \in Q$ için, $\begin{cases} \frac{p}{q} + \frac{0}{1} = \frac{p \cdot 1 + 0 \cdot q}{q \cdot 1} = \frac{p+0}{q} = \frac{p}{q} \text{ dür.} \\ \frac{0}{1} + \frac{p}{q} = \frac{0 \cdot q + p \cdot 1}{q \cdot 1} = \frac{p+0}{q} = \frac{p}{q} \text{ dür.} \end{cases}$

5. Her elemanın bir tersi vardır.

$\frac{p}{q}$ nun tersi $-\frac{p}{q}$ dur. $-\frac{p}{q} \in Q$ olur.

$\begin{cases} \frac{p}{q} + \left(-\frac{p}{q}\right) = \frac{p + (-p)}{q} = \frac{0}{q} = 0 \text{ dır.} \\ -\frac{p}{q} + \frac{p}{q} = \frac{-p + p}{q} = \frac{0}{q} = 0 \text{ dır.} \end{cases}$

O halde, rasyonel sayılar kümesi, toplama işlemiyle birlikte bir değişmeli gruptur. Bu grup (Q, +) şeklinde gösterilir.

Siz de, bazı rasyonel sayılar kullanarak, rasyonel sayılar kümesinde, toplama işleminin özeliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

ç. Rasyonel Sayılar Kümesinde Çarpma İşlemi

İki rasyonel sayının çarpma işleminde, paylar çarpılıp pay ve paydalar da çarpılıp payda olarak yazılır.

Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için, $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}$ olur.

ÖRNEK 1.63

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20}$$

Çarpma İşleminin Özelikleri

1. Kapalılık özeliği vardır.

Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için, $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s} \in Q$ olur.

2. Değişme özeliği vardır.

Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için, $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q}$ olur.

3. Birleşme özeliği vardır.

Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}, \frac{m}{n} \in Q$ için, $\frac{p}{q} \cdot \left(\frac{r}{s} \cdot \frac{m}{n}\right) = \left(\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}\right) \cdot \frac{m}{n}$ dır.

4. Birim elemanı vardır.

Her $\frac{p}{q} \in Q$ için, $\begin{cases} \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b} \text{ dir.} \\ \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1 \cdot a}{1 \cdot b} = \frac{a}{b} \text{ dir.} \end{cases}$

5. Her elemanın tersi vardır

Her $\frac{p}{q} \in Q$ nun $\frac{p}{q} \neq 0$ olmak şartıyla, çarpma işlemine göre, bir tersi vardır.

$\frac{p}{q}$ nun tersi, $\frac{q}{p}$ dır. $\frac{q}{p} \in Q$ dur.

O halde, her $\frac{p}{q} \in Q$ için, $\frac{p}{q} \neq 0$ ise $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$ dir.

6. Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine, sağdan ve soldan dağılma özeliği vardır.

Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}, \frac{m}{n} \in Q$ için,

$$\frac{p}{q} \cdot \left(\frac{r}{s} + \frac{m}{n}\right) = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} + \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}$$

$$\left(\frac{r}{s} + \frac{m}{n}\right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q} + \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$$

d. Rasyonel Sayılar Kümesinde Çıkarma İşlemi

Toplama işleminin özeliklerine göre, her bir rasyonel sayının tersinin, o sayının ters işaretlisi olduğunu gördük. Buna göre,

$\frac{p}{q}$ ile $\frac{r}{s}$ nin tersinin toplamı $\frac{p}{q} + \left(-\frac{r}{s}\right) = \frac{p}{q} - \frac{r}{s}$ dir.

Bu da, $\frac{p}{q}$ den $\frac{r}{s}$ nin çıkarılmasıdır.

Toplama işleminde olduğu gibi, rasyonel sayılar kümesinde çıkarma işlemleri paydaları eşit olan ve olmayan rasyonel sayılarla yapılır.

ÖRNEK 1.64

1. $\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3-4}{5} = \frac{-1}{5}$

2. $\underset{(4)}{\frac{5}{6}} - \underset{(3)}{\frac{1}{8}} = \frac{4\,.\,5}{24} - \frac{1\,.\,3}{24} = \frac{20}{24} - \frac{3}{24} = \frac{17}{24}$

Çıkarma İşleminin Özelikleri

1. Kapalılık özeliği vardır.

Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için, $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} \in Q$ dur.

2. Değişme özeliği yoktur.
3. Birleşme özeliği yoktur.
4. Birim elemanı yoktur.
5. Her elemanın tersi yoktur.

Sizde, rasyonel sayılar kümesindeki sayılarla çıkarma işlemleri yapınız. Çıkarma işleminin özeliklerini doğrulayınız.

e. Rasyonel Sayılar Kümesinde Bölme İşlemi

$\frac{p}{q} \neq 0$ olmak üzere, her $\frac{p}{q} \in Q$ için çarpma işlemine göre, ters elamanın $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$ olduğunu gördük. Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için, $\frac{p}{q}$ nün $\frac{r}{s}$ ile bölümü, $\frac{p}{q}$ nun $\left(\frac{r}{s}\right)^{-1}$ ile çarpımıdır.

O halde, $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{-1} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{p \cdot s}{q \cdot r} \in Q$ olur.

Rasyonel sayılarda bölme işlemi, $\frac{p}{q} : \frac{r}{s}$ veya $\dfrac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}}$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK 1. 65

$\frac{3}{5} : \frac{6}{8} = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{6}{8}\right)^{-1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{6} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 6} = \frac{24}{30}$ olur.

Bölme İşleminin Özelikleri

1. Kapalılık özeliği vardır.

   Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için, $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} \in Q$ dur.

2. Değişme özeliği yoktur.
3. Birleşme özeliği yoktur.
4. Birim elemanı yoktur.
5. Her elemanın tersi yoktur.

Siz de, rasyonel sayılar kümesindeki sayılarla bölme işlemleri yapınız. Bölme işleminin özeliklerini doğrulayınız.

f. Rasyonel Sayılarda Sıralama

Rasyonel sayılar, tam sayıların sıfırdan farklı tam sayılara bölünmesiyle elde edilen sayılardır. Bu bakımdan, rasyonel sayılarda sıralama özelikleri ile, tam sayılardaki sıralama özelikleri birbirine uyar.

Önce pozitif ve negatif rasyonel sayıları tanıyalım

$\frac{p}{q} \in Q$ olsun. $p, q \in Z$ olduğundan, $p \cdot q \in Z$ dir. Buna göre,

1. $p \cdot q > 0$ ise, $\frac{p}{q} > 0$ dir. $\left(\frac{p}{q}\right.$ pozitif rasyonel sayıdır.$\left.\right)$

2. $p \cdot q < 0$ ise $\frac{p}{q} < 0$ dır. $\left(\frac{p}{q}\right.$ negatif rasyonel sayıdır.$\left.\right)$

3. $p = 0$ ise $\frac{p}{q} = 0$ dır.

O halde, payı ve paydası aynı işaretli olan rasyonel sayılar pozitif, değişik işaretli olan rasyonel sayılar da, negatif birer sayıdır. Sıfır sayısı, bütün negatif sayılardan büyük, bütün pozitif sayılardan küçüktür.

Pozitif rasyonel sayılar kümesi Q^+, negatif rasyonel sayılar kümesi Q^- ise

$Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$ olur.

ÖRNEK 1. 66

1. $5 \cdot 6 = 30 > 0$ olduğundan, $\frac{5}{6} > 0$ ya da $\frac{6}{5} > 0$ dır.
2. $(-3)\ (-7) = 21 > 0$ olduğundan, $\frac{-3}{-7} > 0$ ya da $\frac{-7}{-3} > 0$ dır.
3. $(-2)\ (9) = -18 < 0$ olduğundan, $-\frac{2}{9} < 0$ ya da $-\frac{9}{2} < 0$ dır.
4. $0 \cdot 4 = 0$ olduğundan, $\frac{0}{7} = 0$ dır. $\frac{4}{0}$ ise Belirsizdir.

I. İki Rasyonel Sayı Arasındaki Sıralama

Verilen $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için sıralamayı görelim.

1. $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} > 0$ ise $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ dir. $ps - qr > 0$ olur.

2. $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} < 0$ ise $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ dir. $ps - qr < 0$ olur.

3. $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = 0$ ise $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ dir. $ps - qr = 0$ olur.

Buna göre, $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}$ rasyonel sayılar için, ancak ve ancak aşağıdaki üç halden biri doğrudur. (üç hal kuralı)

1. $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$; 2. $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$; 3. $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ olur.

ÖRNEK 1. 67

1. $\underset{(1)}{\frac{7}{8}} - \underset{(2)}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8} > 0$ olduğundan, $\frac{7}{8} > \frac{1}{4}$ dür.

2. $\underset{(2)}{\frac{3}{5}} - \underset{(1)}{\frac{7}{10}} = \frac{6}{10} - \frac{7}{10} = -\frac{1}{10} < 0$ olduğundan, $\frac{3}{5} < \frac{7}{10}$ dir.

3. $\underset{(3)}{\frac{1}{2}} - \underset{(1)}{\frac{3}{6}} = \frac{3}{6} - \frac{3}{6} = 0$ olduğundan, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ olur.

II. İkiden Fazla Rasyonel Sayı Arasında Sıralama

İkiden fazla rasyonel sayıyı, bir eşitsizlik zinciri içinde sıralayabilmek için, paylar veya paydaları eşit olmalıdır. Buna göre;

a. Paydaları eşit olan pozitif rasyonel sayılardan payı büyük olan, negatif rasyonel sayılarda ise payı küçük olan daha büyüktür.

ÖRNEK 1.68

$\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}$ sayılarını büyükten küçüğe doğru sıralayalım.

$\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}$ sayıları için, $7 > 5 > 3$ olduğundan, $\frac{7}{4} > \frac{5}{4} > \frac{3}{5}$ olur.

b. Payları eşit olan pozitif rasyonel sayılardan paydası küçük olan, negatif rasyonel sayılarda ise paydası büyük olan daha büyüktür.

ÖRNEK 1.69

$\frac{9}{10}, \frac{9}{7}, \frac{9}{13}$ sayılarını büyükten küçüğe doğru sıralayalım.

$\frac{9}{10}, \frac{9}{7}, \frac{9}{13}$ sayıları için, $13 > 10 > 7$ olduğundan, $\frac{9}{7} > \frac{9}{10} > \frac{9}{13}$ olur.

ÖRNEK 1.70

$-\frac{2}{3}, -\frac{2}{7}, -\frac{2}{5}$ sayılarını büyükten küçüğe doğru sıralayalım.

$-\frac{2}{3}, -\frac{2}{7}, -\frac{2}{5}$ sayıları için, $-7 < -5 < -3$ olduğundan, $-\frac{2}{7} > -\frac{2}{5} > -\frac{2}{3}$ olur.

c. Verilen rasyonel sayıların pay veya paydaları eşit değilse, önce paylar veya paydalar eşitlenir. (a) veya (b) şıklarına uygun olarak yapılır.

ÖRNEK 1.71

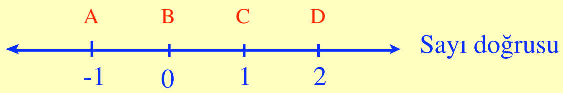
$\frac{7}{18}, \frac{13}{6}, \frac{5}{3}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

$\underset{(1)}{\frac{7}{18}}, \underset{(3)}{\frac{39}{18}}, \underset{(6)}{\frac{30}{18}}$ sayıların paydalarını eşitleyelim. $\frac{7}{18}, \frac{39}{18}, \frac{30}{18}$ a şıkkına göre,

$7 < 30 < 39$ olduğundan, $\frac{7}{18} < \frac{5}{3} < \frac{13}{6}$ olur.

g. Rasyonel Sayıların Sayı Doğrusu Üzerinde Gösterilmesi

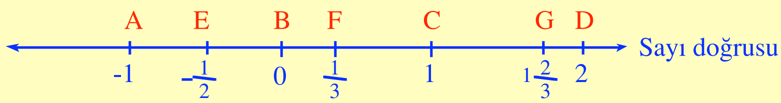
Verilen -1, 0, 1 ve 2 tam sayıların sayı doğrusu üzerinde gösterelim.



Sayı doğrusu üzerinde -1, 0, 1 ve 2 tam sayıların görüntülerini işaretleyelim. -1 in görüntüsü A, 0 ın görüntüsü B, 1 in görüntüsü C ve 2 nin görünüsü C olsun. A ile B tam sayıları arasında başka tam sayı yoktur.

O halde, ardışık iki tam sayının arasında, başka bir tam sayı yoktur.

Şimdi de, $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ve $1\frac{2}{3}$ r asyonel sayılarını sayı doğrusu üzerinde gösterelim.



AB doğru parçasının ortası E olsun. E noktasına karşılık gelen sayı $-\frac{1}{2}$ dir. BC ve CD doğru parçalarını üç eşit parçalara ayıralım. Rasyonel sayıların paylarına göre, F noktasına $\frac{1}{3}$ ve G noktasına $1\frac{2}{3}$ karşılık gelir.

O halde, her rasyonel sayı, sayı doğrusunda bir noktaya karşılık gelir.

h. Rasyonal Sayıların Yoğunluğu

Farklı iki rasyonel sayı arasında, bu sayılardan farklı başka bir rasyonel sayı yazabileceğimizi ispatlarsak, rasyonel sayılar kümesinin yoğun olduğunu göstermiş oluruz.

Verilen rasyonel sayılar, $\frac{p}{q} = a$ ve $\frac{r}{s} = b$ olsun.

a < b olmak üzere, bu eşitsizliğin iki yanını a ve b rasyonel sayılarla ayrı ayrı toplayalım.

$a < b$ ise $a + a < b + a$; $2a < a + b$ dir (1)

$a < b$ ise $a + b < b + b$; $a + b < 2b$ dir (2)

(1) ve (2) eşitsizliklerinden, $2a < a + b < 2b$ yazılabilir.

Her iki yanı 2 ile bölünürse, $a < \frac{a + b}{2} < b$ olur.

O halde, iki rasyonel sayı birbirine ne kadar yakın olursa olsun, bunlar arasında daima sonsuz çoklukta başka rasyonel sayılar vardır. Bu nedenle, rasyonel sayılar yoğundur denir.

Bu özeliğe, rasyonel sayıların yoğun olma özeliği denir. Rasyonel sayılar kümesi yoğundur. Tam sayılar kümesi yoğun değildir.

ÖRNEK 1.72

$-\frac{1}{4}$ ile $\frac{3}{2}$ rasyonel sayılarının araasındaki rasyonel sayıyı bulalım.

$-\frac{1}{4}$ ile $\frac{3}{2}$ rasyonel sayıların arasındaki sayı a olsun.

$$a = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{6}{4}}{2} = \frac{\frac{5}{4}}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \text{ olur.}$$

Sizde, yazacağınız iki rasyonel sayının arasındaki rasyonel sayıyı bulunuz.

1. Rasyonel Sayıların Ondalık Açılımı

Verilen $\frac{p}{q}$ şeklindeki bir rasyonel sayının, payının paydasına bölünmesiyle elde edilen sayıya, rasyonel sayının ondalık açılımı denir. Ondalık açılıma ondalık kesir denir. Ondalık kesirler, ondalık açılım sonucunda elde edilir.

ÖRNEK 1.73

1. $\frac{1}{2}$ rasyonel sayısının ondalık açılımı 0,5 ondalık kesirdir.

2. $\frac{1}{8}$ rasyonel sayısının ondalık açılımı 0,125 ondalık kesirdir.

I. Sonlu Devirli Ondalık Kesirler

```
   19 | 8
 -  8 |------
 ----   11,375
   11
 -  8
 ----
   30
 - 24
 ----
   060
 -  56
 -----
   040
 -  40
 -----
    00
```

Bölmenin beşinci adımında sıfır olduğundan, bölme işlemi bitmiştir. Bölmeye devam edilirse, bölüm hanesinde sıfırlar devreder. Devreden sıfırlar yazmanın bir gereği olmadığından, sıfırlar yazılmaz. Sıfır devredilmiş gibi düşündüğümüz, bu tür ondalık açılıma, sonlu devirli ondalık kesirler denir.

II. Sonsuz Devirli Ondalık Kesirler

```
   20 | 8
 - 18 |------
 ----   11,375
   020
 -  18
 -----
    020
      .
      .
```

$\frac{2}{3} = 0,66\ldots = 0,\overline{6}$ şeklinde yazabiliriz. Bölümde basamakları devreden ondalık açılımlara, sonsuz devirli ondalık kesirler denir.

O halde, her rasyonel sayının bir devirli ondalık açılımı vardır. Bunun karşıtı da doğrudur. Yani, her devirli ondalık açılıma bir rasyonel sayı karşılık gelir.

Sizde bazı rasyonel sayıların bölme işlemi yaparak, sonlu devirli ondalık kesir veya sonsuz devirli ondalık kesirler olduğunu söyleyiniz.

III. Devirli Ondalık Açılımın Gösterdiği Rasyonel Sayının Bulunuşu

ÖRNEK 1.74

a. $0,\overline{7}$; b. $0,\overline{53}$; c. $0,3\overline{8}$ devirli onlalık açılımlarının gösterdiği rasyonel sayıları bulalım.

a. $x = 0,\overline{7} = 0,777\ldots$ olsun.

$$\begin{array}{rl} 10x &= 7,\overline{7} \\ -\quad x &= 0,\overline{7} \\ \hline 9x &= 7 \\ x &= \dfrac{7}{9} \end{array}$$

Kural: m bir rakam olmak üzere,

$0,\overline{m} = \dfrac{m}{9}$ olur.

b. $x = 0,\overline{53} = 0,535353\ldots$ olsun.

$$\begin{array}{rl} 100x &= 53,\overline{53} \\ -\quad x &= 0,\overline{53} \\ \hline 99x &= 53 \\ x &= \dfrac{53}{99} \end{array}$$

Kural: m ve n birer rakam olmak üzere,

$0,\overline{mn} = \dfrac{mn}{99}$ olur.

c. $x = 0,3\overline{8} = 0,3888\ldots$ olsun.

$$\begin{array}{rl} 100x &= 38,\overline{8} \\ -\quad 10x &= 3,\overline{8} \\ \hline 90x &= 35 \\ x &= \dfrac{35}{90} \end{array}$$

Kural: m ve n birer rakam olmak üzere,

$0,m\overline{n} = \dfrac{(mn) - n}{90}$ olur.

ÖZET

- p ve q birer tam sayı ve $q \neq 0$ olmak üzere, $\frac{p}{q}$ şeklindeki sayılara rasyonel sayılar denir. Rasyonel sayılardan oluşan kümeye, rasyonel sayılar kümesi denir. Q ile gösterilir.

- $\frac{p}{q} \in Q$ kesrinde, p ye pay, q ya da payda denir. $p < q$ ise $\frac{p}{q}$ kesrine basit kesir, $p \geq q$ ise $\frac{p}{q}$ kesrine, bileşik kesir denir.

- $\frac{p}{q} \in Q$ ve $\frac{r}{s} \in Q$ olmak üzere, $p \,.\, s = q \,.\, r$ ise bu iki rasyonel sayı birbirine eşittir denir. $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ şeklinde yazılır. Kesirler arasında eşitlik bağıntısı, kesirler kümeside bir denklik bağıntısıdır.

- Bir kesrin pay ve paydası aynı sayma sayısı ile çarpılırsa kesir genişletilmiş, bölünürse sadeleştirilmiş olur.

- Paydaları eşit olan iki rasyonel sayı toplanırken, payların toplamı pay, payda da payda olarak yazılır.

- Paydaları eşit olmayan rasyonel sayılarda ortak payda, paydaların e.k.o.k u olur. Paydaları eşit olmayan rasyonel sayıları toplayabilmek için, önce paydaları eşitlenir. Sonra paylar toplanarak toplama pay, payda da payda olarak yazılır.

- Toplama işleminin özelikleri
  1. Kapalılık özeliği vardır.
  2. Değişme özeliği vardır.
  3. Birleşme özeliği vardır.
  4. Birim elemanı vardır.
  5. Her elemanın bir tersi vardır.

  Bu özelikleri sağladığından rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre, değişmeli gruptur. Bu grup (Q, +) şeklinde gösterilir.

- İki rasyonel sayının çarpma işleminde, paylar çarpılıp pay ve paydalar çarpılıp payda olarak yazılır.

- Çarpma işleminin özelikleri
  1. Kapalılık özeliği vardır.
  2. Değişme özeliği vardır.
  3. Birleşme özeliği vardır.
  4. Birim elemanı vardır.
  5. Her elemanın bir tersi vardır.
  6. Çarpma işleminin toplamı işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özeliği vardır.

- Toplama işleminde olduğu gibi çıkarma işlemi de, paydaları eşit veya eşit olmayan rasyonel sayılarla yapılır.

$\frac{p}{q}$ ile $\frac{r}{s}$ nin tersinin toplamı, $\frac{p}{q} + \left(-\frac{r}{s}\right) = \frac{p}{q} - \frac{r}{s}$ dir. Burada $\frac{p}{q}$ den $\frac{r}{s}$ çıkarılıyor.

$\frac{p}{q} \neq 0$ olmak üzere, her $\frac{p}{q} \in Q$ için çarpma işlemine göre, ters elemanın

$\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$ olduğundan, $\frac{p}{q}$ nün $\frac{r}{s}$ ile bölümü, $\frac{p}{q}$ nün $\left(\frac{r}{s}\right)^{-1}$ ile çarpımıdır.

O halde, $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{-1} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{p \cdot s}{q \cdot r}$ dir.

- Rasyonel sayılar, tam sayıların sıfırdan farklı tam sayılara bölünmesiyle elde edilir. $\frac{p}{q} \in Q$ olsun. p, q $\in Z$ olduğundan, p. q $\in Z$ dir. Buna göre,

1. $p \cdot q > 0$ ise $\frac{p}{q} > 0$ dir.
2. $p \cdot q < 0$ ise $\frac{p}{q} < 0$ dır.
3. $p = 0$ ise $\frac{p}{q} = 0$ dır.

Pozitif rasyonel sayılar kümesi Q^+, negatif rasyonel sayılar kümesi Q^- ise $Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$ olur.

$\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için, rasyonel sayılar için sıralamada,

1. $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} > 0$ ise $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ dir.
2. $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} < 0$ ise $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ dir.
3. $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = 0$ ise $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ olur.

İkiden fazla rasyonel sayıyı, bir eşitsizlik zinciri içinde sıralamak için, payları veya paydaları eşit olmalıdır. Buna göre,

1. Paydaları eşit olan pozitif rasyonel sayılardan payı büyük olan, negatif rasyonel sayılarda ise payı küçük olan daha büyüktür.

2. Payları eşit olan pozitif rasyonel sayılardan paydası küçük olan, negatif rasyonel sayılardan ise paydası büyük olan daha büyüktür.

3. Pay ve paydaları eşit olmayan pozitif veya negatif rasyonel sayılarda sıralama, 1. veya 2. seçeneklere uygun olarak yapılır.

- Her rasyonel sayı, sayı doğrusunda bir noktaya karşılık gelir. Ardışık iki tam sayının arasında başka bir tam sayı yokur.

- Farklı iki rasyonel sayı birbirine, ne kadar yakın olursa olsun bunlar arasında daima sonsuz çoklukta başka rasyonel sayılar vardır. Bu nedenle, rasyonel sayılar yoğundur denir. Bu özeliğe, rasyonel sayıların yoğun olma özeliği denir.

- $\frac{p}{q}$ şeklindeki bir rasyonel sayının, payının paydasına bölünmesi ile elde edilen sayıya, rasyonel sayının ondalık açımı denir. Ondalık açılıma ondalık kesir denir.

- Her rasyonel sayının ondalık açımı vardır. Aynı şekilde devirli ondalık açılımın gösterdiği bir rasyonel sayıda vardır.

ALIŞTIRMALAR

1. $\frac{12}{a}$ ve $\frac{12-a}{3}$ rasyonel sayılarının eşit olması için a yerine hangi tam sayı yazılmalıdır?

2. $\left(1+\frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$ işlemini yapınız.

3. $\left[(0{,}7)^2 - (0{,}3)^2\right] : \frac{4}{5}$ işlemini yapınız.

4. Bir sınıftaki öğrencilerin $\frac{4}{7}$ kızdır. Sınıftaki erkek öğrencilerin $\frac{2}{5}$ spor çalışmalarına katılıyor. Spor çalışmalarına 12 öğrenci katıldığına göre, Bu sınıfta kaç öğrenci vardır?

5. Bir su deposunun $\frac{1}{5}$ doludur. Bu depoya 45 litre daha su konulduğunda deponun yarısı doluyor. Depo dolu iken, içindeki su kaç litredir?

6. Aşağıdaki rasyonel sayıları büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

   a. $-\frac{5}{2}, \frac{4}{5}, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}$

   b. $-2, -\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0, \frac{4}{3}$

7. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

   a. $\dfrac{3}{2-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$

   b. $2 : \dfrac{1}{2-\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}}}$

   c. $\dfrac{4}{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}$

8. $\frac{2}{5}$ e denk olan bir rasyonel sayısının, payına 1 ekleyip paydasından 2 çıkarılırsa, bu rasyonel sayı $\frac{5}{11}$ eşit oluyor. Bu rasyonel sayının pay ile paydasının toplamı kaçtır?

9. Aşağıdaki ifadelerin değerlerini hesaplayınız.

   a. $\dfrac{0{,}\overline{5} + 1{,}\overline{2}}{0{,}\overline{16}}$

   b. $\dfrac{0{,}\overline{29}}{0{,}\overline{43}}$

10. $A = \frac{2}{3}$; $B = -1\frac{1}{2}$; $C = \frac{3}{4}$; $D = 2\frac{1}{4}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayarak, sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

5. GERÇEK (REEL) SAYILAR

Sayılar konusuna başlarken, önce doğal sayılar, sonra bu kümeyi genişleterek tam sayıları ve tam sayılar kümesini de genişleterek, rasyonel sayıları elde ettik. Rasyonel sayılar kümesinin yoğun olduğunundan, herhangi iki rasyonel sayı arasında sonsuz çoklukta başka rasyonel sayılarda vardır. Fakat sayı doğrusu, rasyonel sayılarla dolduramayız. Rasyonel sayılar tarafından yeri, doldurulamayan sayılardan birisi de karesi 2 olan sayıdır. Bu sayı $\sqrt{2}$ şeklinde gösterilir. Bunun gibi $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ sayılarına irrasyonel sayı denir. Bundan başka, π, e gibi sayılarda irasyonel sayılardır.

a. Tanım

Sayı doğrusu üzerinde, rasyonel sayılar tarafından doldurulamayan noktalara karşılık gelen sayılara, irrasyonel sayı denir. Q' ile gösterilir.

Rasyonel sayılar kümesi ile, irasyonel sayılar kümesinin birleşimine de gerçek (reel) sayılar kümesi denir. R ile gösterilir.

$R = Q \cup Q'$ olur. R nin elemanlarına da gerçek sayı denir.

O halde, her gerçek sayıya, sayı doğrusunda bir nokta karşılık geldiğinden gerçek sayılar kümesi, en geniş kümedir.

O halde, $N \subset Z \subset Q \subset R$ olur.

b. Gerçek Sayılar ile İlgili Özelikler

I. Eşitlik ile ilgili Özelikler

Her $a, b, c \in R$ için,

1. İki hal kuralı — $a = b$ veya $a \neq b$
2. Yansıma özeliği — $a = a$
3. Simetri özeliği — $a = b$ ise $b = a$
4. Geçişme özeliği — $a = b$ ve $b = c$ ise $a = c$
5. Toplamada sadeleştirme özeliği — $a = b$ ise $a + c = b + c$
6. Çarpmada sadeleştirme özeliği — $a = b$ ise $a \cdot c = b \cdot c$ $(c \neq 0)$

II. Toplama ile İlgili Özelikler

Her $a, b \in R$ için,

1. Kapalılık özeliği $a + b \in R$
2. Değişme özeliği $a + b = b + a$
3. Birleşme özeliği $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. Toplama işleminde etkisiz eleman 0 dır. $a + 0 = 0 + a = a$
5. Topluma işlemine göre, ters eleman özeliği $a + (-a) = (-a) + a = 0$

III. Çarpma ile ilgili özelikler

Her $a, b \in R$ için,

1. Kapalılık özeliği $a . b \in R$
2. Değişme özeliği $a . b = b . a$
3. Birleşme özeliği $(a . b) . c = a . (b . c)$
4. Çarpma işleminde etkisiz eleman 1 dir. $a . 1 = 1 . a = a$
5. Çarpma işlemine göre, ters eleman özeliği $a .\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) . a = 1 \quad (a \neq 0)$

IV. Dağılma özeliği

Her $a, b, c \in R$ için,

1. Çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine, soldan dağılma özeliği
   $a . (b + c) = a . b + a . c$
2. Çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine, sağdan dağılma özeliği
   $(b + c) . a = b . a + c . a$

Sizde bazı gerçek sayıları kullanarak, gerçek sayılar ile ilgili özeliklerin doğruluğunu gösteriniz.

c. Gerçek Sayılarda Sıralama

$a, b \in Q$ olmak üzere $a \leq b$ ifadesi, "a sayısı b den küçük ya da eşittir" diye okunur.

Gerçek sayılarda " $\leq$ " bağıntısı yansıma, ters simetri ve geçişme özeliklerini sağladığından bir sıralama bağıntısıdır.

$a < b$ ise a sayısı, sayı doğrusu üzerinde b sayısının solunda yer alır.

Sıralama Özelikleri

a, b, c, d $\in$ R için

1. Üç hâl kuralı $a < b$, $a = b$, $a > b$

2. Geçişme özeliği

   I. $a < b$ ve $b < c$ ise $a < c$

   II. $a > b$ ve $b > c$ ise $a > c$

3. Toplama özeliği $a < b$ ve $c < d$ ise $a + c < b + d$

4. Sadeleştirme özeliği $a < b$ ise $a \pm c < b \pm c$

5. I. $a < b$ ise $a\,c < b\,c$ $(a > 0$ ise)

   II. $a < b$ ise $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ $(c > 0$ ise)

   III. $a < b$ ise $ac > bc$ $(c < 0$ ise)

   IV. $a < b$ ise $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ $(c < 0$ ise)

6. Her $a, b \in Q^+$ ve $a < b$ için, $n.\,a > b$ olacak biçimde $n \in N^+$ vardır.

7. a ve b aynı işaretli ve $a < b$ ise, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ dir.

8. $0 < a < b$ için, $a^n < b^n$ $(n \in Z^+)$

9. I. $a^2 < a$ ise, $0 < a < 1$

   II. $a^2 > a$ ise $(a < 0$ veya $a > 1)$

10. $a < b < 0$ için,

    I. $a^n < b^n$ (n tek sayı ise)

    II. $a^n > b^n$ (n çift sayı ise)

11.

    I. $a\,.\,b < 0$ ise a ile b ters işaretlidir. $(a < 0$ ve $b > 0)$ veya $(a > 0$ ve $b < 0)$ dır.

    II. $a\,.\,b > 0$ ise, a ile b aynı işaretlidir. $(a < 0$ ve $b < 0)$ veya $(a > 0$ ve $b > 0)$ dir.

12. I. $a > 0$ ise $a^n > 0$ $(n \in R)$

    II. $a < 0$ ise $a^n > 0$ (n çift sayı)

    III. $a < 0$ ise $a^n < 0$ (n tek sayı)

ÖRNEK 1.75

Sadeleştirme özeliğine göre, bir normal olarak yazalım. Bu eşitsizliğin her iki yanına aynı bir gerçek sayıyı eklersek eşitsizlik yön değiştirmez.

$12 < 15$ ise $12 + 3 < 15 + 3$; $15 < 18$ olur.

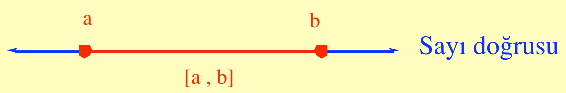
Sizde, bazı gerçek sayılar kullanarak, gerçek sayılarda sıralama özeliklerin doğruluğunu gösteriniz.

ç. Gerçek Sayılarda Aralık Kavramı

Bir eşitsizlik olarak verilen açık önermelerin, doğruluk kümelerini yazabilmek için, aralık kavramını bilmemiz gerekir.

Her $a, b \in Q$ ve $a < b$ olmak üzere,

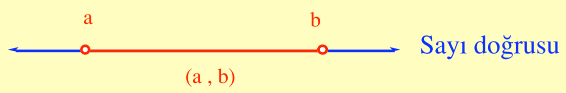
1. $[a, b] = \{x \mid x \in R$ ve $a \leq x \leq b\}$ kümesine, $[a, b]$ kapalı aralığı denir.



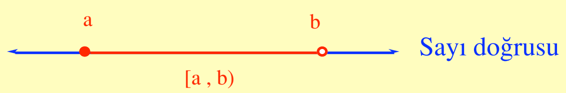
a ile b sayılarına karşılık gelen noktalara, aralığın uç noktaları,

b - a sayısına da aralığın uzunluğu denir.

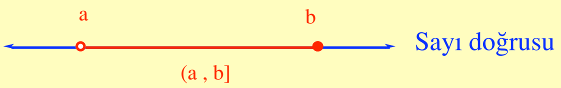
2. $(a . b) = \{x \mid x \in R$ ve $a < x < b\}$ kümesine (a, b) açık aralığı denir.



3. $[a, b) = \{x \mid x \in R$ ve $a \leq x < b\}$ kümesine, a da kapalı, b de açık aralık denir.



4. $(a, b] = \{x \mid x \in R \quad \text{ve } a < x \leq b\}$ kümesine a da açık, b de kapalı aralık denir.



ÖRNEK 1.76

$x, y \in R$ için, $-3 \leq x \leq 1$ ve $2 \leq y < 4$ olduğuna göre, $2x + 3y$ ifadesinin hangi aralıkta olduğunu bulalım.

$-3 \leq x \leq 1$ için, $2(-3) \leq 2x \leq 2(1)$; $-6 \leq 2x \leq 2$

$2 \leq y \leq 4$ için, $3(2) \leq 3y \leq 3(4)$; $6 \leq 3y \leq 12$

$$\begin{array}{rl} & -6 \leq 2x \leq 2 \\ + & \ \ 6 \leq 3y \leq 12 \\ \hline & \ \ 0 \leq 2x + 3y \leq 14 \end{array}$$ olur.

O halde, $2x + 3y$ ifadesi $[0, 14]$ kapalı aralığındadır.

ÖRNEK 1.77

$-1 \leq 2x + 3 < 9$ eşitsizliğinin reel sayılardaki çözüm kümesini bulalım. Sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

$-1 \leq 2x + 3 < 9$

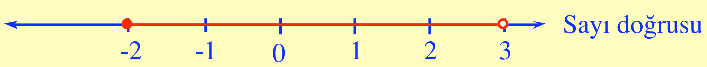
$-1 - 3 \leq 2x + 3 - 3 < 9 - 3$

$-4 \leq 2x < 6$

$-2 \leq x < 3$

$Ç = \{x \mid x \in R, \ -2 \leq x < 3\} = [-2, 3) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Şimdi de çözüm kümesini sayı doğrusu üzerinde gösterelim.



d. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

İçinde bilinmeyen bulunan ve bilinmeyenin bazı değerleri için doğruluğu sağlanabilen eşitliklere denklem denir.

a, b, c birer gerçek sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax + b = c$ şeklindeki ifadelere, birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

Gerçek sayılarda eşitliğin özeliklerinden bazılarını kullanarak, sayı kümesinde verilen eşitlikle ilgili denkemlerin (açık önermelerin), çözüm (doğruluk) kümelerini bulalım.

ÖRNEK 1. 78

$5x - 2 = 3$ Denkleminin doğal sayılar kümesinde çözüm kümesini bulalım.

$5x - 2 = 3$; $5x = 3 + 2$; $5x = 5$; $x = 1$ Ç = { 1} dir.

ÖRNEK 1. 79

$3x + 2 = 4$ denkleminin tam sayılar kümesinde, çözüm kümesini bulalım.

$3x + 2 = 4$; $3x = 4 - 2$; $3x = 2$;

$x = \frac{2}{3}$; $x = \frac{2}{3} \notin Z$ dir.

O halde, denklemin Z de çözüm kümesi boş kümedir. Ç = $\varnothing$

ÖRNEK 1.80

$\frac{5}{6}x + 1 = \frac{2}{3}$ denkleminin çözüm kümesini,

a. Doğal sayılar kümesinde,

b. Tam sayılar kümesinde,

c. Rasyonel sayılar kümesinde,

d. Gerçek sayılar kümesinde bulalım.

$$\underset{(1)}{\frac{5}{6}}x + \underset{(6)}{\frac{1}{1}} = \underset{(2)}{\frac{2}{3}} \ ; \quad \frac{5}{6}x + \frac{6}{6} = \frac{4}{6} \ ;$$

$$\frac{5}{6}x = \frac{4}{6} - \frac{6}{6} \ ; \quad \frac{5}{6}x = -\frac{2}{6} \ ; \quad x = -\frac{2}{5} \text{ olur.}$$

Verilen denklemin;

a. Doğal sayılardaki çözüm kümesi, Ç = $\varnothing$ dir.

b. Tam sayılardaki çözüm kümesi, Ç = $\varnothing$ dir.

c. Rasyonel sayılardaki çözüm kümesi, Ç = $\left\{-\frac{2}{5}\right\}$ dir.

d. Gerçek sayılardaki çözüm kümesi, $\left\{-\frac{2}{5}\right\}$ olur.

e. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$a \neq 0$, a, b bilinen gerçek sayılar, x değişken gerçek sayı olmak üzere, $ax + b > 0$ veya $ax + b < 0$ şeklindeki ifadelere birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler denir.

$x > 1$, $x < -3$, $-2x + 6 \geq 0$, $5x - 2 \leq 0$ ifadeleri, birinci dereceden bir bilinmeyenli birer eşitsizliktir. Çünkü bu eşitsizliklerin içinde bir bilinmeyen vardır. Bu bilinmeyenin derecesi, birinci derecedendir.

Eşitsizlikleri sağlayan elemanları bulma işlemine, eşitsizliği çözme, bu elemanların kümesine de eşitsizliğin çözüm kümesi denir.

Gerçek sayılarda sıralamanın özeliklerden bazılarını kullanarak, sayı kümelerinde verilen eşitsizlikle ilgili denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.

ÖRNEK 1.81

$2x + 5 \leq 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini,

a. Doğal sayılar kümesinde,

b. Tam sayılar kümesinde,

c. Rasyonel sayılar kümesinde,

ç. Gerçek sayılar kümesinde, bulalım.

d. Çözüm kümesini sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

Verilen eşitsizliği, çözersek,

$2x + 5 \leq 1$; $2x \leq 1 - 5$; $2x \leq -4$; $x \leq -2$ olur.

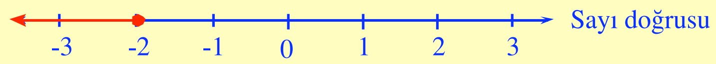
a. Doğal sayılardaki çözüm kümesi, Ç = $\varnothing$

b. Tam sayılardaki çözüm kümesi, Ç = $\{x \mid x \leq -2,\ x \in Z\}$

c. Rasyonel sayılardaki çözüm kümesi, $Ç = \{x \mid x \leq -2,\ x \in Q\}$

ç. Gerçek sayılardaki çözüm kümesi, $Ç = \{x \mid x \leq -2,\ x \in R\}$ olur.

d. Şimdi de çözüm kümesini sayı doğrusu üzerinde gösterelim.



ÖRNEK 1.82

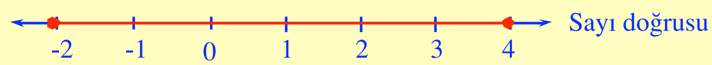
Gerçek sayılar kümesinde, $-5 \leq 2x - 1 \leq 7$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım ve sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

Verilen eşitsizliği çözersek,

$-5 \leq 2x - 1 \leq 7$; $-5 + 1 \leq 2x \leq 7 + 1$; $-4 \leq 2x \leq 8$; $-2 \leq x \leq 4$ dir.

Gerçek sayılar kümesinde çözüm kümesi, $Ç = \{x \mid -2 \leq x \leq 4,\ x \in R\}$ olur.

Çözüm kümesi, sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir.



ÖZET

- Sayı doğrusu üzerinde, rasyonel sayılar tarafından doldurulamayan noktalara karşılık gelen sayılara irrasyonel sayı denir. Q' ile gösterilir. Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimine de gerçek (reel) sayılar kümesi denir. R ile gösterilir. $R = Q \cup Q'$ olur. Gerçek sayılar kümesi en geniş kümedir. $N \subset Z \subset Q \subset R$ olur. Gerçek sayılarla ilgili birçok özelikler vardır. Bunlar yardımıyla denklemleri çözebiliriz.

- $a, b \in Q$ olmak üzere $a \leq b$ ifadesine, a sayısı b den küçük ya da eşittir denir. Gerçek sayılarda "$\leq$" bağıntısı, yansıma, ters simetri ve geçişme özeliklerini sağladığından bir sıralama bağıntısıdır. $a < b$ ise a sayısı sayı doğrusu üzerinde b nin solunda yer alır. Sıralama ile ilgili birçok özelikler vardır.

- Bir eşitsizlik olarak verilen açık önermelerin, doğruluk kümelerini yazabilmek için, aralık kavramını bilmemiz gerekir.

Her $a, b \in Q$ ve $a < b$ olmak üzere

1. $[a, b] = \{x \mid x \in R \text{ ve } a \leq x \leq b\}$ kümesine, [a, b] kapalı aralığı denir.
2. $(a . b) = \{x \mid x \in R \text{ ve } a < x < b\}$ kümesine, (a, b) açık aralığı denir.
3. $[a, b) = \{x \mid x \in R \text{ ve } a \leq x < b\}$ kümesine, a da kapalı, b de açık aralık denir.
4. $(a, b] = \{x \mid x \in R \text{ ve } a < x \leq b\}$ kümesine, a da açık, b de kapalı aralık denir.

- İçinde bilinmeyen bulunan ve bilinmeyenin bazı değerleri için doğruluğu sağlanabilen eşitliklere denklem denir. a, b, c birer gerçek sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b = c$ şeklindeki ifadelere, birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

- $a \neq 0$, a, b bilinen gerçek sayılar, x değişken gerçek sayı olmak üzere $ax + b > 0$ veya $ax + b < 0$ şeklindeki ifadelere, birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler denir. Eşitsizlikleri sağlayan elemanları bulma işlemine, eşitsizliği çözme, bu elemanların kümesine de, eşitsizliğin çözüm kümesi denir.

ALIŞTIRMALAR

1. a, b $\in$ R olmak üzere, aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a. $3(x-2)-2(3+x)=5(-x-3)$

b. $2(x-1)-4[4-3(x+1)]=10x-7$

c. $2(2x-1)=5x+5$

2. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini R de bulunuz.

a. $\frac{5x-2}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{x-5}{3}-3$

b. $\frac{2x-5}{3}-\frac{5x}{4}+\frac{2}{3}=0$

c. $\frac{3x-1}{3}-\frac{5x+2}{12}=\frac{x-3}{4}-\frac{1}{2}$

3. Aşağıdaki eşitsizliklerin gerçek sayılarda, çözüm kümelerini bulunuz. Sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a. $\frac{x-1}{2}<x+5$

b. $\frac{1}{2}x-1\geq\frac{x-1}{4}$

c. $\frac{x+1}{2}-2<\frac{x}{3}+1$

4. Aşağıdaki eşitsizliklerin gerçek sayılarda, çözüm kümelerini bulunuz. Sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a. $4\left(\frac{x-1}{2}\right)<3x-1<2x+5$

b. $\frac{x-1}{3}<\frac{x+1}{2}<\frac{2x+5}{6}$

c. $x\leq\frac{x}{2}+5\leq x+3$

5. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini, N, Z, Q ve R de bulunuz. R deki çözüm k ü mesini sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a. $3x<15$

b. $5x-2<-2<x+14$

c. $1-2x>x+7$

6. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini, N, Z, Q ve R de bulunuz. R deki çözüm kümesini sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a. $1 < 2x + 5 < 11$

b. $x + 2 < 2x - 1 < x + 5$

c. $3 \leq 2x - 1 \leq 9$

7. $0 \leq X \leq 4$ ve $2 \leq y \leq 3$ olduğuna göre $4x - 3y$ ifadesinin alabileceği en küçük değer ile en büyük değerlerin toplamı kaçtır?

8. Aşağıdaki ifadelerin aralıklarını bulunuz. Sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a. $[-2, 1) \cap [-1, 3]$

b. $[-2, 1) \cup [-1, 3]$

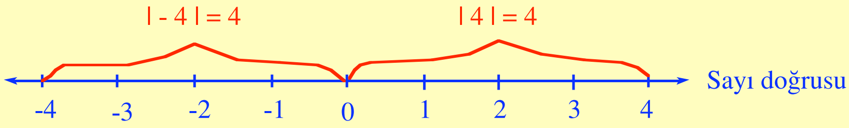
9. $-3 < x < -1$ ifadesinde, x^2 hangi aralıkda değer alır?

10. $-1 < x < 1$ ve $-2 < y < 2$ olduğuna göre, $3x - 2y$ ifadesinin alabileceği tam sayı değerlerini yazınız.

6. MUTLAK DEĞER

Mutlak değeri, gerçek sayı doğrusu üzerinde, herhangi bir noktanın başlangıç noktasına olan uzaklığı şeklinde tanımlayabiliriz. Doğru üzerinde, herhangi bir noktanın koordinatı x olsun. x in başlangıç noktasına olan uzaklığı, $|x|$ sembolü ile gösterilir. x in mutlak değeri olarak okunur.

ÖRNEK 1.83



$|x| = 4$ ise $x = 4$ veya $x = -4$ tür.

Uzak daima pozitif sayılarla ölçülür.

O halde, $x > 0$ ise $|x| = x$

$x = 0$ ise $|x| = |0| = 0$

$x < 0$ ise $|x| = -x$ olur.

a. Tanım

Mutlak değer, $x \in R$ için, x in mutlak değeri $|x|$ sembolü ile gösterilir.

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise,} \\ -x & x < 0 \text{ ise,} \end{cases} \qquad \text{veya} \qquad |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ ise,} \\ -x, & x < 0 \text{ ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

ÖRNEK 1.84

1. $|-5| = -|-5| = 5$

2. $\left|3 - \sqrt{2}\right| = 3 - \sqrt{2} \quad \left(3 > \sqrt{2}\right)$

3. $\big|5 - |-6|\big| = |5 - 6| = |-1| = 1$

O halde, $x \in R$ olmak üzere, $|x| \geq 0$ ise $|x|$ sayısı her zaman pozitiftir. Hiç bir zaman negatif olamaz.

b. Mutlak değere ait özelikler

1. $|x|$ ve $|f(x)|$ ifadelerinin en küçük değeri sıfırdır.

   $|x| \geq 0$, $|f(x)| \geq 0$

2. $|x| = |-x| \geq 0$

3. $|x-y| = |y-x|$

4. $-|a| \leq a \leq |a|$

5. $|a.b| = |a|.|b|$

6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$

7. $|a^n| = |a|^n \quad (n \in N^+)$

8. $||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$ (üçgen eşitsizliği)

9. $|a| < |b|$ ise $-|b| < a < |b|$

10. $|a.b| = 0$ ise $a = 0$ ve $b = 0$

11. $|f(x)| + |g(x)| = 0$ ise $f(x) = 0$ ve $g(x) = 0$

12. $x^2 < y^2$ ise $|x| < |y|$ olur.

Şimdi de bu özeliklere ait örnekler yapalım.

ÖRNEK 1.85

$|2x-4|$ ifadesini en küçük yapan x in değerini bulalım.

Verilen ifadenin en küçük değeri 0 dır.

$|2x-4| = 0$ ise $2x - 4 = 0$; $2x = 4$; $x = 2$ olur.

ÖRNEK 1.86

$|x+y-3| + |x-y-1| = 0$ ise x ve y nin değerlerini bulalım.

$|f(x)| + |g(x)| = 0$ ise $f(x) = 0$ ve $g(x) = 0$ olduğundan,

$x + y - 3 = 0$ ve $x - y - 1 = 0$ olmalıdır.

$x + y - 3 = 0$ ise $x + y = 3$ (1)

$x - y - 1 = 0$ ise $x - y = 1$ (2)

(1) ve (2) eşitliklerini taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{r} x + y = 3 \\ + \quad x - y = 1 \\ \hline 2x = 4 \end{array}$$

$x = 2$ olur

$x = 2$ değerini (1) eşitliğinde yerine yazarsak

$x + y = 3$ ise $2 + y = 3$; $y = 3 - 2$; $y = 1$ olur.

c. Çeşitli Örnekler

ÖRNEK 1.87

$4\,|x - 2| - 10 = 2$ denkleminin çözüm kümesini reel sayılarla bulalım.

$4\,|x - 2| - 10 = 2$ ise $4\,|x - 2| = 10 + 2$; $4\,|x - 2| = 12$ $|x - 2| = 3$ olur.

$|x - 2| = 3$ ise
- a. $x - 2 = 3$; $x = 2 + 3$; $x = 5$ dir. $Ç_1 = \{ x \mid x = 5, x \in R\}$
- b. $-x + 2 = 3$; $-x = -2 + 3$; $-x = 1$; $x = -1$ dir. $Ç_2 = \{x \mid x = -1, x \in R\}$

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2$ olduğundan, $Ç = \{ -1, 5 \}$ olur.

ÖRNEK 1.88

$x \in R$ olmak üzere, $|2x - 6| > 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

a. $2x - 6 > 0$ ise $(x \geq 3)$

$2x - 6 > 4$; $2x > 4 + 6$; $2x > 10$; $x > 5$ dir.

$Ç_1 = \{x \mid x > 5, \quad x \in R\}$

b. $2x - 6 < 0$ ise $(x < 3)$

$-2x + 6 > 4$; $-2x > 4 - 6$; $-2x > -2$; $x < 1$ dir.

$Ç_2 = \{x \mid x < 1, \quad x \in R\}$

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2$ olduğundan,

$Ç = \{x \mid x < 1 \text{ veya } x > 5, x \in R\}$ olur.

ÖRNEK 1.89

$| 3x - 2y |$ ifadesinin, en küçük değerini alması için, $\dfrac{x + y}{x - y}$ nin değerinin kaç olduğunu bulalım.

Verilen ifadenin en küçük değeri alması için, ifadenin değeri (0) sıfır olmalıdır.

Buradan, $|3x - 2y| = 0$ olur. $3x - 2y = 0$; $3x = 2y$; $x = \dfrac{2y}{3}$ dir.

Öyleyse, $\dfrac{x + y}{x - y} = \dfrac{\dfrac{2y}{3} + y}{\dfrac{2y}{3} - y} = \dfrac{\dfrac{5y}{3}}{\dfrac{-y}{3}} = \dfrac{5y}{3} \cdot \left(- \dfrac{3}{y}\right) = -5$ olur.

ÖRNEK 1.90

$x \in R$ olmak üzere, $| x + 1 | \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım. Sayı doğrusu üzerinde gösterelim.

a. $x + 1 \geq 0$ ise $(x \geq -1)$ dir.

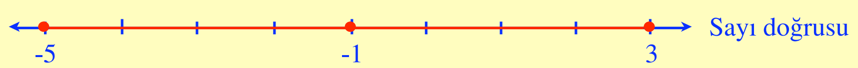
$x + 1 \leq 4$ ise $x \leq 3$ dir. $Ç_1 = \{x \mid -1 \leq x \leq 3, \ x \in R\}$ olur.

b. $x + 1 < 0$ ise $(x < -1)$ dir.

$-(x + 1) \leq 4$ ise $x + 1 \geq -4$; $x \geq -5$ dir. $Ç_2 = \{ x \mid 5 \leq x \leq -1, x \in R\}$ olur.

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2$ olduğundan $Ç = \{x \mid -5 \leq x \leq 3, x \in R\}$ olur.

Şimdi de sayı doğrusunda gösterelim.



ÖRNEK 1.91

$x \in R$ olmak üzere, $\left|\dfrac{4}{x-1}\right| \geq 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini liste yöntemi ile yazalım.

$$\left|\frac{4}{x-1}\right| = \frac{|4|}{|x-1|} = \frac{4}{|x-1|} \quad \text{dir.}$$

$$\frac{4}{|x-1|} \geq 2\ ; \quad 4 \geq 2|x-1|\ ; \quad |x-1| \leq 2 \text{ olur.}$$

Bunun çözüm kümesinin aralığını bulalım.

$-2 \leq |x-1| \leq 2$ ifadesinden $-1 \leq x \leq 3$ bulunur.

$-1 \leq x \leq 3$ eşitsizliğini sağlayan tam sayılar; -1, 0, 1, 2 ve 3 tür. Ancak $x = 1$ değeri verilen eşitsizlikteki $\dfrac{4}{x-1}$ ifadesinin paydasını 0 yaptığından çözüme dahil edilmez.

O halde, $Ç = \{-1, 0, 2, 3\}$ olur.

ÖZET

- Mutlak değer $x \in R$ için, x in mutlak değeri $| x |$ sembolü ile gösterilir.

$$| x | = \begin{cases} x, & x > 0 \text{ ise,} \\ 0, & x = 0 \text{ ise,} \\ -x & x < 0 \text{ ise,} \end{cases} \quad \text{veya} \quad | x | = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ ise,} \\ -x, & x < 0 \text{ ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

- Mutlak değerlere ait aşağıdaki özelikler vardır.

1. $| x |$ ve $| f(x) |$ ifadelerinin en küçük değeri sıfırdır.

   $| x | \geq 0$, $| f(x) | \geq 0$

2. $| x | = | -x | \geq 0$

3. $| x - y | = | y - x |$

4. $- | a | \leq a \leq | a |$

5. $| a . b | = | a | . | b |$

6. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$

7. $|a^n| = |a|^n \quad (n \in N^+)$

8. $|\, | a | - | b | \,| \leq | a + b | \leq | a | + | b |$ (üçgen eşitsizliği)

9. $| a | < | b |$ ise $- | b | < a < | b |$

10. $| a . b | = 0$ ise $a = 0$ ve $b = 0$

11. $| f(x) | + | g(x) | = 0$ ise $f(x) = 0$ ve $g(x) = 0$

12. $x^2 < y^2$ ise $| x | < | y |$ olur.

- Bu özelikler yardımıyla, mutlak değerlere ait sorularımızı çözebiliriz.

ALIŞTIRMALAR

1. $|x| + 3x = 12$ denkleminin çözüm kümesini,

   a. Doğal sayılar kümesinde,
   b. Tam sayılar kümesinde,
   c. Rasyonel sayılar kümesinde,
   ç. Gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

2. Rasyonel sayılar kümesinde, $|2x + 1| = \frac{5}{2}$ denkleminde çözüm kümesini bulunuz.

3. Evrensel küme, reel sayı olmak üzere,aşağıdaki açık önermelerin doğruluk kümesini bulunuz.

   a. $|x - 4| = 3$
   b. $|2x - 3| = 7$
   c. $|3x - 2| = 4$

4. $x \in R$ olmak üzere, aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz. Sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

   a. $|x - 1| < 5$
   b. $|x - 2| > 1$
   c. $|2x - 1| \geq 4$

5. $|3x - 1|$ ifadesinin en küçük değeri alması için, $9x^2 + 3x - 8$ in değeri kaç olmalıdır?

6. $|3x - 1| \leq 3$ açık önermesini doğrulayan kaç tane x tam sayısı vardır.

7. $A = \{x \mid |2x + 1| \leq 11, \ x \in N\}$ kümesini liste biçiminde yazınız.

8. $A = \{x \mid 1 \leq |x + 1| \leq 2, \ x \in R\}$ kümesini liste biçiminde yazınız.

9. $x \in R$ için, $|3x - 3| + 2 = |4 - 4x|$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

10. $|x - 3| = 3 - x$ ve $|x + 4| = x + 4$ eşitliklerinin her ikisini de sağlayan kaç tane tam sayı vardır.

7. ÜSLÜ SAYILAR

Bu bölümde reel sayıların tam kuvvetlerini ve bunlara ait özelikleri inceleyeceğiz. Önce bir reel sayının pozitif tam kuvvetini göreceğiz.

a. Tanım

$x \in R$ ve $n \in Z^+$ olsun. n tane x in çarpılması ile elde edilen reel sayıya, x in n inci kuvveti denir. Bu sayı x^n şeklinde gösterilir.

Buna göre, $x^n = \overbrace{x \,.\, x \,.\, x \ldots x}^{n \text{ tane}}$ dir.

x^n ifadesinde, x reel sayısına taban, n ye de üs veya kuvvet denir.

Buna göre, her $x \in R - \{0\}$ için, $x^1 = x$, $x^0 = 1$ ve $0^n = 0$ dir.

0^0 ifadesi tanımsızdır.

ÖRNEK 1.92

a. $2^3 = 2 \,.\, 2 .\, 2 = 8$

b. $(-3)^3 = (-3)\ (-3)\,(-3) = -27$

c. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

b. Üslü Sayılarda Çarpma İşlemi

I. Tabanları aynı olan üslü, iki sayıyı çarparken, üsler toplanarak verilen tabana üs olarak yazılır.

ÖRNEK 1.85

a. $2^3 \,.\, 2^6 = 2^{3+6} = 2^9$

b. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2+4} = \left(\frac{1}{3}\right)^6$

c. $(x+1)^2 \,.\, (x+1)^3 = (x+1)^{2+3} = (x+1)^5$

II. Tabanları farklı, üsleri aynı olan üslü iki sayıyı çarparken, ortak üs tabanlar çarpımına üs olarak yazılır.

$x, y \in R$ ve $n \in Z^+$ olmak üzere, $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$ dir.

ÖRNEK 1.86

a. $(-2)^4 \cdot (x)^4 = (-2x)^4 = 16x^4$

b. $(-a)^5 \cdot (-b)^5 = [(-a) \cdot (-b)]^5 = (ab)^5$

c. $\left(\frac{4}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^6 = \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2}\right)^6 = 2^6$

c. Üslü Sayılarda Bölme İşlemi

I. Tabanları aynı olan üslü iki sayının bölme işleminde, payın üssünden paydanın üssü çıkarılır. Verilen tabana üs olarak yazılır. $x \in R - \{0\}$, $m, n \in Z^+$ olmak üzere,

$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ dir.

1. $m > n$ ise, $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ dir.

2. $m = n$ ise, $\frac{x^m}{x^n} = \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = x^o = 1$ dir.

Sıfırdan farklı bir reel sayının, sıfırıncı kuvveti 1 e eşittir.

3. $m < n$ ise, $\frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}} = x^{-(n-m)} = x^{m-n}$ dir.

ÖRNEK 1.95

a. $\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3$

b. $\frac{(a+b)^3}{(a+b)^3} = (a+b)^{3-3} = (a+b)^o = 1$

c. $\frac{a^2 b^3}{a^5 b^4} = \frac{1}{a^{5-2} \cdot b^{4-3}} = \frac{1}{a^3 b}$

II. Tabanları farklı, üsleri aynı olan üslü iki sayıyı bölerken, ortak üs altında tabanlar bölünür.

$x \in R,\ y \in R - \{0\},\ n \in Z^+$ için, $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$ dir.

ÖRNEK 1.88

a. $\dfrac{9^4}{3^4} = \left(\dfrac{9}{3}\right)^4 = 3^4$

b. $\dfrac{(x - x^2)^3}{x^3} = \left(\dfrac{x - x^2}{x}\right)^3 = \left(\dfrac{x}{x} - \dfrac{x^2}{x}\right)^3 = (1 - x)^3$

c. $\dfrac{4^2}{(0,5)^2} = \left(\dfrac{4}{0,5}\right)^2 = \left(\dfrac{4}{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(4 \cdot \dfrac{2}{1}\right)^2 = 8^2$

ç. Üslü Bir Sayının Kuvveti

Üslü bir sayının kuvvetini bulurken, üs ile kuvvetin çarpımı üslü sayının tabanına üs olarak yazılır.

$x \in R,\ n \in Z^+$ için, $(x^n)^m = x^{nm}$ dir.

ÖRNEK 1.97

a. $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$

b. $(x^a)^{a - b} = x^{a(a - b)} = x^{a^2 - ab}$

c. $(8x^4)^2 = (2^3 x^4)^2 = 2^{3 \cdot 2} \cdot x^{4 \cdot 2} = 2^6 x^8$

d. Negatif Üslü Sayılar

Negatif üslü bir sayı, payı 1, paydası pozitif üslü olan bir rasyonel sayıdır. Gerçek sayıların pozitif kuvvetleri ile ilgili bütün özelikler, negatif kuvvetleri içinde geçerlidir.

$n \in Z^+$ ve $x \in R - \{0\}$ için, $\left(\frac{1}{x}\right)^m = \frac{1}{x^m} = x^{-m}$ dir.

ÖRNEK 1.98

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = \frac{1}{2^{-5}} = 2^5$

b. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{\frac{2}{3}}\right)^2 = \left(1 \cdot \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

e. Benzer Üslü Sayılar

Tabanları ve üsleri aynı olan üslü sayılara, benzer üslü sayılar denir.

ÖRNEK 1.99

a. ax^3 ile bx^3 benzer üslü ifadelerdir. Burada, katsayılar etkilemez.

b. $4(a-b)^2$ ile $2(a-b)^2$ ifadeleri de benzer ifadedir.

f. Üslü Sayının Toplamı ve Farkı

Benzer üslü sayıları toplamak veya çıkarmak mümkündür. Üslü sayılar birer reel sayı olduğundan, benzer üslü sayılarda toplama işlemi, çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özeliği yardımıyla yapılır. Toplama veya çıkarma işlemi yapılırken katsayılar birbiri ile toplanır veya çıkarılır.

$ax^n + bx^n - cx^n = (a + b - c)\, x^n$ dir.

ÖRNEK 1.100

a. $5x^3 - 4x^3 + 3x^3 - 2x^3 = (5 - 4 + 3 - 2)\, x^3 = 2x^3$

b. $\frac{1}{2}x^2 - 2x^2 + 6x^2 = \left(\frac{1}{2} - 2 + 6\right)x^2 = \frac{9}{2}x^3$

g. Üslü Sayıların Eşitliği

Tabanları eşit olan iki üslü sayının eşit olabilmesi için, üsleri de eşit olmalıdır.

$n, m \in Z^+$ ve $x \in R - \{-1, 0, 1\}$ için, $x^n = x^m$ ise $n = m$ dir.

ÖRNEK 1.101

$2^{x-1} = 16$ ise x kaçtır?

$2^{x-1} = 2^4$

$x - 1 = 4$

$x = 5$ olur.

h. Çeşitli Örnekler

ÖRNEK 1.102

$7^{2x-4} = 1$ ise x in kaç olduğunu bulalım.

$7^{2x-4} = 7^0$

$2x - 4 = 0$

$2x = 4$

$x = 2$ olur.

ÖRNEK 1.103

$(0,04)^2 . (0,004)^{-1}$ işleminin sonucunu bulalım.

$$(0,04)^2 . (0,004)^{-1} = \left(\frac{4}{100}\right)^2 . \left(\frac{4}{1000}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^2 . \left(\frac{1}{250}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{5^2}\right)^2 . (10 . 25)$$

$$= \frac{1}{5^4} . \left(10 . 5^2\right) = \frac{10 . 5^2}{5^4} = \frac{10}{5^2} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$ olur.

ÖRNEK 1.104

$a \neq 0$ ve $b \neq 0$ için $\dfrac{(a^2 b^3)^4}{(a^4 b^2)^2}$ işleminin sonucunu bulalım.

$$\frac{(a^2 b^3)^4}{(a^4 b^2)^2} = \frac{a^8 b^{12}}{a^8 b^4} = a^{8-8} b^{12-4} = a^0 b^8 = b^8$$ olur.

ÖRNEK 1.105

$3^{n-1} + 3^{n} + 3^{n+1}$ işleminin sonucunu bulalım.

$3^{n-1} + 3^{n} + 3^{n+1} = \frac{3^{n}}{3} + 3^{n} + 3^{n} . 3 = \left(\frac{1}{3} + 1 + 3\right) 3^{n} = \frac{13}{3} 3^{n}$

$= \frac{13}{3} 3^{n} = 13 . 3^{n-1}$ olur.

ÖRNEK 1.106

$x^{0,4} = 4$ ise x in kaç olduğunu bulalım.

$x^{0,4} = 4$; $x^{\frac{4}{10}} = 2^{2}$; $x^{\frac{2}{5}} = 2^{2}$; $x^{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2}} = 2^{2 \cdot \frac{5}{2}}$; $x = 2^{5} = 32$ olur.

ÖZET

- $x \in R$ ve $n \in Z^+$ olsun. n tane x in çarpılması ile elde edilen reel sayıya, x in n inci kuvveti denir. Bu sayı x^n şeklinde gösterilir.

  Buna göre, $x^n = \overbrace{x \,.\, x \,.\, x \ldots x}^{n \text{ tane}}$ dir.

  x^n ifadesinde, x reel sayısına taban, n ye de üs veya kuvvet denir.

- Tabanları aynı olan üslü, iki sayıyı çarparken, üsler toplanarak verilen tabana üs olarak yazılır.

  $x \in R$ ve $m, n\ Z^+$ olmak üzere, $x^m \,.\, x^n = x^{m+n}$ dir.

- Tabanları farklı, üsleri aynı olan üslü iki sayıyı çarparken, ortak üs tabanlar çarpımına üs olarak yazılır.

  $x, y \in R$ ve $n \in Z^+$ olmak üzere, $x^m \,.\, y^n = (x \,.\, y)^n$ dir.

- Tabanları aynı olan üslü iki sayının bölme işleminde, payın üssünden paydanın üssü çıkarılır. Verilen tabana üs olarak yazılır.

  $x \in R - \{0\}$, $m, n \in Z^+$ olmak üzere, $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ dir.

- Tabanları farklı, üsleri aynı olan üslü iki sayıyı bölerken, ortak üs altında tabanlar bölünür.

  $x \in R$, $y \in R - \{0\}$, $n \in Z^+$ için, $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$ dir.

- Üslü bir sayının kuvvetini bulurken, üs ile kuvvetin çarpımı üslü sayının tabanına üs olarak yazılır.

  $x \in R$, $n \in Z^+$ için, $(x^n)^m = x^{nm}$ dir.

- Negatif üslü bir sayı, payı 1, paydası pozitif üslü olan bir rasyonel sayıdır. Gerçek sayıların pozitif kuvvetleri ile ilgili bütün özelikler, negatif kuvvetleri içinde geçerlidir

  $n \in Z^{+}$ ve $x \in R, - \{0\}$ için, $\left(\frac{1}{x}\right)^{m} = \frac{1}{x^{m}} = x^{-m}$ dir.

- Tabanları ve üsleri aynı olan üslü sayılara, benzer üslü sayılar denir.

- Üslü sayılar birer reel sayı olduğundan, benzer üslü sayılarda toplama işlemi, çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özeliği yardımıyla yapılır. Toplama veya çıkarma işlemi yapılırken katsayılar birbiri ile toplanır veya çıkarılır.

- Tabanları eşit olan iki üslü sayının eşit olabilmesi için üsleri de eşit olmalıdır.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$

b. $2x^2 \cdot 4x^3 \cdot 8x^4$

c. $(0{,}5)^{x+y} \cdot 2^{x+y}$

ç. $(x-1)^3 \cdot (x-1)^4 \cdot (x-1)^{-2}$

2. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $(-2)^3 \cdot (-2)^2 \cdot (-2^4)$

b. $(-a)^{-3} \cdot (-a)^{-4} \cdot (-a^6)$

c. $(2^3)^2 \cdot (-2^2)^3 \cdot (2)^{-4}$

ç. $4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4$

3. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\dfrac{x^2\, y^2\, x^3 z}{x \,.y^2\, z^2}$

b. $\dfrac{a^{x+1}\, b^{x+2}}{a^{x-2}\, b^{x-1}}$

c. $\dfrac{4^{x+1}\, 3^{x-1}}{2^{x+2}\, 9^{x+1}}$

ç. $\dfrac{(2^3)^2\, 8^3}{16^2}$

4. Aşağıdaki çarpımların sonucu kaç basamaklıdır?

a. $5^9 . 2^{14}$

b. $6^4 . 5^6$

5. $5^{-x-1} . 25^{-x+2} = 125^{x-1}$ ise x kaçtır?

6. $2^x = 5$ ve $5^y = 4$ ise x . y kaçtır?

7. $2^{x+3} . 4^{2x-1} . 8^{-2x} = 128$ ise x kaçtır?

8. $2^{-2x} . 3^{2x-1} . 6^{2x} = 9^{x-1}$ ise x kaçtır?

9. $\dfrac{3\,a^3\,b^2}{4\,a^{-2}\,b^3} . \dfrac{2\,a^{-2}\,b^{-3}}{a^3\,b}$ işlemini en sade biçimde yazınız

10. $\dfrac{3^{a-b} . 6^{4a-2b+1}}{2^{3a-2b+1} . 3^{4a-3b+2}}$ işlemini en sade biçimde yazınız.

8. KÖKLÜ SAYILAR

Daha önce üslü ifadelerde, negatif veya pozitif gerçek sayıların kuvvetlerini bulmuştuk. Bir üslü sayının değeri,

$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$ ve $(2)^2 = (2)(2) = 4$ tür.

Burada, karesi 4 olan iki gerçek sayı vardır. Bunlardan negatif olanı (-2), pozitif olanı da (+2) dir. Fakat karesi -4 olan gerçek sayı yoktur.

O halde, her $x \in R^+$ için, karesi x olan biri negatif diğeri pozitif iki gerçek sayı vardır.

Değeri ve üssü verilen üslü sayıların, tabanını bulma işlemine, kök alma işlemi denir.

a. Tanım

Karesi $a \in R^+$ sayısına eşit olan iki sayıdan pozitif olanına, a nın pozitif kare kökü, negatif olanına, a nın negatif karekökü denir. a nın pozitif karekökü $\sqrt{a}$, negatif karekökü $-\sqrt{a}$ ile gösterilir. Buna göre, $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$ dır.

Karesi negatif olan gerçek sayı olmadığından, negatif sayıların karekökü yoktur.

$\sqrt{a^2}$ daima pozitiftir. $\sqrt{a^2} \geq 0$ dır.

Bir gerçek sayının karesinin karekökü, o gerçek sayının mutlak değerine eşittir. Her $a \in R$ için, $\sqrt{a^2} = |a|$ dır.

ÖRNEK 1.107

Aşağıdaki kareköklü sayıların eşitlerini bulalım.

$\sqrt{9} = |3| = 3$ dür. $\sqrt{49} = |7| = 7$ dir. $\sqrt{81} = |9| = 9$ dur.

b. Kakeröklü Sayılarda İşlemler

I. Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Kareköklü sayıları toplamak veya çıkarmak için, kök içindeki terimler benzer olmalıdır. Benzer olan terimlerin kat sayılarının toplamı veya farkı, o terimlere kat sayı olarak yazılır.

$a \geq 0$ ve $b, c, d \in R$ için, $b\sqrt{a} + c\sqrt{a} - d\sqrt{a} = (b + c - d)\sqrt{a}$ dır.

ÖRNEK 1.108

$3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = (3 + 4 - 5)\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ olur.

II. Çarpma İşlemi

İki köklü sayıyı çarpmak için, kök içindeki sayılar çarpılır. Ortak kök altında yazılır.

$a \geq 0,\ b \geq 0$ ve $a, b \in R$ için, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ dir.

ÖRNEK 1.109

$\sqrt{27} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{27 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9$ olur.

III. Bölme İşlemi

İki köklü sayıyı bölmek için, kök içindeki sayılar bölünür. Ortak kök altında yazılır.

$a \geq 0,\ b \geq 0$ ve $a, b \in R$ için, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ dir.

ÖRNEK 1.110

$\dfrac{\sqrt{0,8}}{\sqrt{0,2}} = \sqrt{\dfrac{0,8}{0,2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$ olur.

IV. Kareköklü Bir Sayının n. Kuvveti

$a \in R^+$ ve $n \in R^+$ için, $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$ dir.

ÖRNEK 1.111

$(3\sqrt{3})^4 = 3^4 \cdot \sqrt{3^4} = 3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$ dır.

V. Kareköklü Bir Sayının Eşleniği

Çarpımları rasyonel olan iki irrasyonel sayıdan her birine, diğerinin eşleniği denir. Eşlenik iki terimin çarpımı, birinci terimin karesi ile ikinci terimin karesinin farkına eşittir.

$a, b \in R^+$ için, $\sqrt{a}$ nın eşleniği, $\sqrt{a}$ dır.

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ nin eşleniği, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ dir.

Karaköklü bir sayıyı eşleniği ile çarpınca, elde edilen değer, daima rasyonel bir sayıdır.

ÖRNEK 1.112

$(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ ün eşleniği, $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ dir. Bu sayıların çarpımları,

$(\sqrt{3} - \sqrt{2}).(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2 = 3 - 2 = 1$ olur.

VI. Kareköklü bir Sayının Paydasını Rasyonel Yapmak

Paydasında köklü bir sayı bulunan kesrin, paydasındaki kökü kaldırma işlemine, paydayı rasyonel yapma denir.

Kareköklü sayıların paydasını rasyonel yapmak için, paydanın eşleniği ile pay ve payda çarpılır.

ÖRNEK 1.113

Aşağıdaki ifadelerin paydalarını rasyonel yapalım.

1. $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ olur.

2. $\dfrac{4}{\sqrt{5} - 1} = \dfrac{4(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1).(\sqrt{5} + 1)} = \dfrac{4(\sqrt{5} + 1)}{\sqrt{5}^2 - (1)^2} = \dfrac{4(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \dfrac{4(\sqrt{5} + 1)}{4} = \sqrt{5} + 1$ olur.

3. $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \dfrac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1).(\sqrt{2} - 1)} = \dfrac{(\sqrt{2} - 1)^2}{\sqrt{2}^2 - (1)^2} = \dfrac{2 - 2\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = 3 - 2\sqrt{2}$ olur.

VII. $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ Şeklindeki Sayıları, $\sqrt{p} \pm \sqrt{k}$ Şekline Dönüştürmek

I. $a.b \in R^+$ ve $a^2 > b$ için, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ sayılarının iki kök toplamı veya farkı şeklinde yazılabilmesi için, $a \pm \sqrt{b}$ nin tam kare olması gerekir. Bunun için, verilen sayı $\sqrt{a + 2\sqrt{m}}$ şeklinde yazılabiliyorsa, çarpımları m, toplamları a olan iki sayı bulunur.

Bu sayılar p ve k olmak üzere,

$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{a \pm 2\sqrt{m}} = \sqrt{p} \pm \sqrt{k}$ dir. $(p > k)$

ÖRNEK 1.114

$\sqrt{12 - 2\sqrt{35}}$ sayısının eşitini bulalım.

Yukarıdaki ifadeye göre düşünürsek,

çarpımları 35, toplamları 12 olan iki sayı 7 ve 5 tir.

O halde, $\sqrt{12 - 2\sqrt{35}} = \sqrt{7} - \sqrt{5}$ olur.

ÖRNEK 1.115

$\sqrt{8+\sqrt{60}}$ sayısının eşitini bulalım.

Önce, $\sqrt{8+\sqrt{60}}$ sayısını, $\sqrt{a+2\sqrt{m}}$ şekline dönüştürelim.

$\sqrt{8+\sqrt{60}} = \sqrt{8+\sqrt{4.15}} = \sqrt{8+2\sqrt{15}}$ dir.

Çarpımları 15, toplamları 8 olan iki sayı 5 ve 3 tür.

O halde, $\sqrt{8+\sqrt{60}} = \sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$ olur.

II. $a \,.\, b \in R^{+}$ ve $a^2 > b$ için, $\sqrt{a \mp \sqrt{b}}$ şeklindeki sayıları

$$\sqrt{a \mp \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \mp \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$ eşitliğinden faydalanarak,

$\sqrt{p}+\sqrt{k}$ şeklindeki sayılara dönüştürebiliriz.

ÖRNEK 1.116

$\sqrt{2+\sqrt{3}}$ ifadesinin eşitini yukarıdaki formülü kullanarak bulalım.

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\,.\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,.\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$ olur.

VIII. Kareköklü Bir Sayının Sadeleştirilmesi

Kareköklü bir sayıda, gerekli işlemler yapılarak en sade şekilde yazılmasına, kareköklü bir sayının sadeleştirilmesi denir.

ÖRNEK 1.117

Aşağıdaki köklü ifadeleri, en sade şekilde yazalım.

a. $\sqrt{x^4 y^6 z^2} = \sqrt{(x^2 y^3 z)^2} = x^2 y^3 z$ dir.

b. $\sqrt{a\, b^{-3} c^{-1}} \,.\, \sqrt{a\, b^5 c^3} = \sqrt{\frac{a^2 b^5 c^3}{b^3 c}} = \sqrt{a^2 b^2 c^2} = a\, b\, c$ dir.

c. Kareköklü Denklemler

ÖRNEK 1.118

$\sqrt{2x+1} = 5$ Denkleminin çözüm kümesini bulalım.

Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 = 5^2$$
$$2x + 1 = 25$$
$$2x = 24$$
$$x = 12 \quad \text{dir.}$$

Şimdi, x = 12 nin denklemi sağlayıp, sağlamadığına bakalım.

$\sqrt{2x+1} = 5$; $\sqrt{2(12)+1} = 5$; $\sqrt{24+1} = 5$; $\sqrt{25} = 5$; $5 = 5$ tir.

O halde, çözüm kümesi $Ç = \{12\}$ olur.

Kareköklü denklemlerin çözümünde bulunan x değerinin, verilen denklemi sağlayıp sağlamadığına bakılır. Eğer denklemi sağlamıyorsa, çözüm kümesinin elemanı olamaz. Bu zamanda çözüm kümeleri boş kümedir.

ÖRNEK 1.119

$2\sqrt{x+4} = -5$ Denklemin çözüm kümesini bulalım.

Eşitliğin her iki yanının karesini alalım.

$$\left(2\sqrt{x+4}\right)^2 = (-5)^2$$
$$4(x+4) = 25$$
$$4x + 16 = 25$$
$$4x = 9$$
$$x = \frac{9}{4}$$

Şimdi bulduğumuz $x = \frac{9}{4}$ sayısının, denklemi sağlayıp sağlamadığına bakalım.

$2\sqrt{x+4} = -5$

$2\sqrt{\frac{9}{4}+4} = -5$

$2\sqrt{\frac{25}{4}} = -5$

$2 \cdot \frac{5}{2} = -5$

$5 \neq -5$ olduğundan, $x = \frac{9}{4}$ denklemi sağlamaz.

O halde, bu denklemin çözüm kümesi $Ç = \varnothing$ dir.

ç. Gerçek Sayıların Rasyonel Kuvvet:

$a \in R^+$ ve $n \in Z^+$, $n \geq 2$ için, $x^n = a$ eşitliğini sağlayan bir $x \in R^+$ vardır. Bu sayıya, a gerçek sayısının n. kuvvetten kökü denir.

$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ şeklinde gösterilir. $\sqrt[n]{a}$ ifadesinde, n ye kök kuvveti denir.

n = 2 ise a nın karekökü diye okunur. $\sqrt[2]{a}$ veya kısaca $\sqrt{a}$ yazılır.

n = 3 ise a nın küp kökü diye okunur. $\sqrt[3]{a}$ şeklinde yazılır.

n = m ise a nın m. dereceden kökü diye okunur $\sqrt[m]{a}$ şeklinde yazılır.

ÖRNEK 1.120

1. $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = (3)^{2\cdot\frac{1}{2}} = 3$
2. $\sqrt[3]{11} = 11^{\frac{1}{3}}$
3. $\sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{6}}$
4. $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{-\frac{2}{3}}$

d. Kök İçindeki Sayıyı Kök Dışına Çıkarma

I. Kök Kuvveti İle Kök İçindeki Sayının Kuvveti Aynı İse

Kök kuvveti ile kök içinin kuvveti aynı olan sayılar kök dışına çıkar.

$n \in Z^+$ ve $a, b > 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a^n . b} = a . \sqrt[n]{b}$ dir.

ÖRNEK 1.121

1. $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
2. $\sqrt[5]{x^5 . y} = x . \sqrt[5]{y}$
3. $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^4} = \frac{3}{2}$

II. Kök Kuvveti İle Kök İçindeki Sayının Kuvveti Aynı Değilse

Kök içindeki sayının derecesi, kökün kuvvetinin tam katı ise, bu sayıyı kök dışına çıkarırken, üssünü kökün kuvvetine böleriz.

$m, n \in Z^+$ ve $a > 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a^{nm}} = a^{\frac{nm}{n}} = a^m$ dir.

ÖRNEK 1.122

1. $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$
2. $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = 4$
3. $\sqrt[5]{a^{16} b^{20}} = \sqrt[5]{a^{15} . a . b^{20}} = a^{\frac{15}{5}} b^{\frac{20}{5}} . \sqrt[5]{a} = a^3 b^4 \sqrt[5]{a}$

e. Kök Dışındaki Sayıyı Kök İçine Alma

I. Kök Dışındaki Sayı Üslü Değilse

Kök dışındaki bir sayı kökün derecesi kadar bir kuvvetle kök içine alınır.

$n \in Z^+$ ve $a, b > 0$ ise, $a.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ dir.

ÖRNEK 1.123

1. $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 . 3} = \sqrt[3]{8 . 3} = \sqrt[3]{24}$

II. Kök dışındaki sayı üslü ise,

Kök dışındaki üslü bir sayı kök içine alınırken, bu sayının üssü, kökün derecesi ile çarpılır.

$m, n \in Z^+$ ve $a, b > 0$ ise, $a^m \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{mn} . b}$

ÖRNEK 1.124

1. $a^2 b \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a^{2.3}.a . b^3 . b} = \sqrt[3]{a^{6+1} . a^{3+1}} = \sqrt[3]{a^7 b^4}$

2. $x\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^4 . x} = \sqrt[4]{x^{4+1}} = \sqrt[4]{x^5}$

f. Köklü Bir Sayının Kuvveti

$n \in Z^+$ ve $a > 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a}$ gibi köklü bir sayının m inci kuvveti,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{a} ... \sqrt[n]{a}}_{\text{m tane}} = \sqrt[n]{\underbrace{a . a . a ... a}_{\text{m tane}}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ dir.}$$

O halde, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ olur.

ÖRNEK 1.125

1. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

2. $\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^3 = \sqrt[4]{a^9} = \sqrt[4]{a^8 . a} = a^2 \sqrt[4]{a}$

g. Köklü Bir Sayının Kökü

$m, n \in Z^+$ ve $a > 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a}$ sayısının m inci dereceden kökü

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a} \text{ dir.}$$

O halde, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ olur.

ÖRNEKLER 1.126

1. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[4.3]{2} = \sqrt[12]{2}$

2. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{3}}} = \sqrt[5.3.2]{3} = \sqrt[30]{3}$

h. Köklü Sayıların Bazı Özelikleri

1. $\sqrt[n]{a \,.\, \sqrt[n]{a^n \sqrt{a \,.\,.\,.}}} = \sqrt[n-1]{a}$

2. $\sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a \,.\,.\,.}}} = \sqrt[n+1]{a}$

3. $\sqrt{a\,.\,(a+1) + \sqrt{a\,.\,(a+1) + \sqrt{a\,.\,(a+1) + \sqrt{\,.\,.\,.}}}} = a + 1$

4. $\sqrt{a\,.\,(a+1) - \sqrt{a\,.\,(a+1) - \sqrt{a\,.\,(a+1) - \sqrt{\,.\,.\,.}}}} = a$

5. $\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{\,.\,.\,.}}}} = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

6. $\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{\,.\,.\,.}}}} = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

Kökün kökü olarak ifade edilmiş birçok soruda bu kurallar kullanılarak, kolayca sonuç elde edilir.

ÖRNEKLER 1.127

1. $\sqrt[4]{8 \sqrt[4]{8 \sqrt[4]{8 \,.\,.\,.}}} = \sqrt[4-1]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

2. $\sqrt{56 + \sqrt{56 + \sqrt{56 + \,.\,.\,.}}} = \sqrt{7\,.\,8 + \sqrt{7\,.\,8 + \sqrt{7\,.\,8 + \,.\,.\,.}}} = 8$

3. $\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3} + \,.\,.\,.}} = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4\,.\,3}}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$

ı. Köklü Sayıların Kök Kuvvetlerini Eşitleme

$\sqrt[m]{a^n}$ ve $\sqrt[p]{a^s}$ köklü sayılarının kök kuvvetleri eşitlenirken, kök kuvvetlerinin e.k.o.k bulunur. Kök kuvvetleri uygun sayılarla genişletilerek eşitlenir.

ÖRNEKLER 1.128

1. $\sqrt[3]{7}$ ve $\sqrt[5]{7}$ sayılarının kök kuvvetlerini eşitleyelim.

Kök kuvvetleri olan 3 ve 5 sayılarının e.k.o.k u 15 tir. Bu iki köklü sayının derecesini 15 e eşitleyebiliriz.

$\sqrt[3]{7} = \sqrt[3.5]{7^5} = \sqrt[15]{7^5}$ ve $\sqrt[4]{7} = \sqrt[5.3]{7^3} = \sqrt[15]{7^3}$ olur.

2. $\sqrt[6]{x^5}$ ve $\sqrt[4]{x^3}$ sayılarının kök kuvvetlerini eşitleyelim.

6 ve 4 sayılarının e.k.o.k 12 olduğundan iki köklü sayının derecesini 12 ye eşitleyebiliriz.

$\sqrt[3]{x^5} = \sqrt[2.6]{x^{5.2}} = \sqrt[12]{x^{10}}$ ve $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4.3]{x^{3.3}} = \sqrt[12]{x^9}$ olur.

i. Köklü Sayılarda Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Köklü sayıları toplayabilmek veya çıkarabilmek için, kök kuvvetleri ile kök içleri aynı olmalıdır. Bu şartlara uyan köklü sayıların katsayıları toplanır veya çıkarılır.

$x\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} - z\sqrt[n]{a} = (x + y - z)\sqrt[n]{a}$ dır.

ÖRNEKLER 1.129

1. $8\sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{7} - 4\sqrt[3]{7} = (3 + 2 - 4)\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7}$

2. $8\sqrt[n]{x} + 5\sqrt[n]{x} - 9\sqrt[n]{x} = (8 + 5 - 9)\sqrt[n]{x} = 4\sqrt[n]{x}$

Burada, $n \in Z^+$, $n \geq 2$ ve $x \geq 0$ olmalıdır.

j. Köklü Sayılarda Çarpma İşlemi

Kök kuvvetleri aynı olan köklü sayıların çarpımı, bu sayıların çarpımının aynı kuvvetten köküne eşittir.

Kök kuvvetleri farklı olan köklü sayıları çarpmak için, önce kök kuvvetleri eşitlenir. Sonra çarpma yapılır.

$a, b \in R^+$ ve $n \in N^+$ ise $\sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \, . \, b}$ dir,

ÖRNEKLER 1.130

1. $\sqrt[3]{3}\,.\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3\,.\,9\,.} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

2. $\sqrt[4]{5}\,.\sqrt{3} = \sqrt[4]{5}\;.\sqrt[2\,.\,2]{3^2} = \sqrt[4]{5}\,.\sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4]{5\,.\,9} = \sqrt[4]{45}$

k. Köklü Sayılarda Bölme İşlemi

Kök kuvvetleri aynı olan köklü iki sayının bölümü, bu sayıların bölümlerinin aynı kuvvetten köküne eşittir.

Kök kuvvetleri farklı olan köklü iki sayıyı bölmek için, önce kök kuvvetleri eşitlenir. Sonra bölme işlemi yapılır.

a, b $\in Z^+$ $(b \neq 0)$ ve $n \in N^+$ ise $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ dir,

ÖRNEKLER 1.131

1. $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

2. $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3\,.\,2]{15^3}}{\sqrt[2\,.\,3]{5^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{3375}{25}} = \sqrt[6]{135}$

l. Köklü Sayıların Paydasını Rasyonel Yapma

Kareköklü sayılarda paydanın nasıl rasyonel yapıldığını öğrenmiştik. Bu bölümde ise, kök kuvveti ikiden büyük olan köklü ifadelerin paydasını rasyonel yapmayı öğreneceğiz

I. $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ Şeklinde Verilen Köklü Sayının Paydasını Rasyonel Yapmak

$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ şeklindeki verilen köklü sayının paydasını rasyonel yapmak için pay ve payda $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ile çarpılır.

$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \dfrac{1.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \dfrac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$ olur.

ÖRNEKLER 1.132

1. $$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{5}$$

2. $$\frac{1}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt[3]{3}} = \frac{1\,.\,\sqrt{2}\,.\,\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}\,.\sqrt[3]{3}.\,\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt{2}\,.\sqrt[3]{9}}{2\,.\,3} = \frac{\sqrt{2}\,.\sqrt[3]{9}}{6}$$

II. Paydasında Küpköklü Olan Köklü Sayıların Paydasını Rasyonel Yapmak

Paydasında küpköklü terim bulunduran köklü sayıların paydasını rasyonel yapmak için, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ ve $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ özdeşliğinden yararlanılır.

ÖRNEKLER 1.133

$\frac{1}{\sqrt[3]{5} - 1}$ sayısının paydasını rasyonel yapalım.

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ özdeşliğinde, $a = \sqrt[3]{5}$ ve $b = 1$ olursa,

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 - 1^3 = \left(\sqrt[3]{5} - 1\right)\left[\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 + \sqrt[3]{5} + 1^2\right]$$

$5 - 1 = \left(\sqrt[3]{5} - 1\right)\left(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1\right)$ elde edilir.

$\sqrt[3]{5} - 1$ sayısını rasyonel yapmak için pay ve payda $\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1$ ile çarpılır.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5} - 1} = \frac{1\,.\left(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1\right)}{\left(\sqrt[3]{5} - 1\right).\left(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1\right)} = \frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1}{5 - 1} = \frac{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1}{4}$$ olur.

m. Köklü Sayılarda Sıralama

Kök kuvvetleri eşit olan sayılarda, kök içi büyük olan sayı büyüktür. a < b < c ise

$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{c}$ dir.

Kök kuvvetleri eşit değilse, kök kuvvetlerinin e. k. o. k bulunur. Kök kuvvetleri e. k. o. k göre, genişletildikten ve kök kuvvetleri eşitlendikten sonra sıralama yapılır.

ÖRNEKLER 1.134

1. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ve $\sqrt{7}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

   $2 < 3 < 7$ olduğundan, $\sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{7}$ olur.

2. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$ ve $\sqrt[6]{15}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

   Verilen sayıların kök kuvvetleri 3, 2 ve 6 olduğundan, bunların e.k.o.k u 6 dır.

   Buna göre, $\sqrt[3.2]{2^2}$, $\sqrt[2.3]{3^3}$ ve $\sqrt[6]{15}$ ya da $\sqrt[6]{4}$, $\sqrt[6]{27}$ ve $\sqrt[6]{15}$ dir.

   $4 < 15 < 27$ olduğundan, $\sqrt[3]{2} < \sqrt[6]{15} < \sqrt{3}$ olur.

ÖZET

- Karesi $a \in R^+$ sayısına eşit olan iki sayıdan pozitif olanına, a nın pozitif kare kökü, negatif olanına, a nın negatif karekökü denir. a nın pozitif karekökü $\sqrt{a}$, negatif karekökü $-\sqrt{a}$ ile gösterilir. Buna göre, $(\sqrt{a})^2 = (-\sqrt{a})^2 = a$ dır.

  Bir gerçek sayının karesinin karekökü, o gerçek sayının mutlak değerine eşittir. Her $a \in R$ için. $\sqrt{a^2} = |a|$ dır.

- Kareköklü sayıları toplamak veya çıkarmak için, kök içindeki terimler benzer olmalıdır. Benzer olan terimlerin kat sayılarının toplamı veya farkı, o terimlere kat sayı olarak yazılır.

  $a \geq 0$ ve $b, c, d \in R$ için, $b\sqrt{a} + c\sqrt{a} - d\sqrt{a} = (b + c - d)\sqrt{a}$ dır.

- İki köklü sayıyı çarpmak için, kök içindeki sayılar çarpılır. Ortak kök altında yazılır.

  $a \geq 0$, $b \geq 0$ ve $a, b \in R$ için, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ dir.

- İki köklü sayıyı bölmek için, kök içindeki sayılar bölünür. Ortak kök altında yazılır.

  $a \geq 0$, $b \geq 0$ ve $a, b \in R$ için, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ dir.

  Kareköklü bir sayının n. dereceden kuvveti, $a \in R^+$ ve $n \in R^+$ için,

  $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$ dir.

  Çarpımları rasyonel olan iki irrasyonel sayıdan her birine, diğerinin eşleniği denir. Eşlenik iki terimin çarpımı, birinci terimin karesi ile, ikinci terimin karesinin farkına eşittir.

  Paydasında köklü bir sayı bulunan kesrin, paydasındaki kökü kaldırma işlemine, paydayı rasyonel yapma denir. Kareköklü sayıların paydasını rasyonel yapmak için, paydanın eşleniği ile pay ve payda çarpılır.

  $a . b \in R^+$ ve $a^2 > b$ için, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ şeklindeki sayıları,

  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2} \pm \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}$ eşitliğinden faydalanarak,

  $\sqrt{p} + \sqrt{k}$ şeklindeki sayılara dönüştürebiliriz.

$a \in R^+$ ve $n \in Z^+$, $n \geq 2$ için, $x^n = a$ eşitliğini sağlayan bir $x \in R^+$ vardır.
Bu sayıya a gerçek sayısının n. kuvvetten kökü denir. $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
şeklinde gösterilir. $\sqrt[n]{a}$ ifadesinde, n ye kök kuvveti denir.

- Kök kuvveti ile kök içinin kuvveti ayın olan sayılar kök dışına çıkar.

  $n \in Z^+$ ve $a, b > 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a^n . b} = a . \sqrt[n]{b}$ dir.

- Kök içindeki sayının derecesi kökün kuvvetinin tam katı ise, bu sayıyı kök dışına çıkarırken, üssünü kökün kuvvetine böleriz.

  $m, n \in Z^+$ ve $a > 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a^{nm}} = a^{\frac{nm}{n}} = a^m$ dir.

- Kök dışındaki bir sayı kökün derecesi kadar bir kuvvetle kök içine alınır.

  $n \in Z^+$ ve $a, b > 0$ ise, $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

- Kök dışındaki üslü bir sayı kök içine alınırken, bu sayının üssü, kökün derecesi ile çarpılır.

  $m, n \in Z^+$ ve $a, b > 0$ ise $a^m \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{mn} b}$

$n \in Z^+$ ve $a > 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a}$ gibi köklü bir sayının m inci kuvveti,

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ dır.

$m, n \in Z^+$ ve $a > 0$ olmak üzere, $\sqrt[n]{a}$ sayısının m inci dereceden kökü

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$ dir.

$\sqrt[n]{a}$ köklü sayılarının kök kuvvetleri eşitlenirken, kök kuvvetlerinin e.k.o.k u bulunur. Kök kuvvetleri uygun sayılarla genişletilerek eşitlenir.

- Köklü sayıları toplayabilmek veya çıkarabilmek için kök kuvvetleri ile kök içleri aynı olmalıdır. Bu şartlara uyan köklü sayıların katsayıları toplanır veya çıkarılır.

  $x\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} - z\sqrt[n]{a} = (x + y - z)\sqrt[n]{a}$ dır.

- Kök kuvvetleri aynı olan köklü sayıların çarpımı, bu sayıların çarpımının aynı kuvvetten köküne eşittir. Kök kuvvetleri farklı olan köklü sayıları çarpmak için, önce kök kuvvetleri eşitlenir. Sonra çarpma yapılır.

  $a, b \in R^+$ ve $n \in N^+$ ise $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a . b}$ dir.

- Kök kuvvetleri aynı olan köklü iki sayının bölümü, bu sayıların bölümlerinin aynı kuvvetten köküne eşittir. Kök kuvvetleri farklı olan köklü iki sayıyı bölmek için, önce kök kuvvetleri eşitlenir. Sonra bölme işlemi yapılır.

  $a, b \in Z^+$ $(b \neq 0)$ ve $n \in N^+$ ise $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ dir.

  $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ şeklinde verilen köklü sayının paydasını rasyonel yapmak için pay ve payda

  $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ile çarpılır.

- Paydasında küp köklü terim bulunduran köklü sayıların paydasını rasyonel yapmak için, $a^3 + b^3 = (a+b) . (a^2 - ab + b^2)$ ve $a^3 - b^3 = (a-b) . (a^2 + ab + b^2)$ özdeşliğinden yararlanılır.

- Kök kuvvetleri eşit olan sayılarda, kök içi büyük olan sayı büyüktür. $a < b < c$ ise

  $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{c}$ dir. Kök kuvvetleri eşit değilse, kök kuvvetlerinin e. k. o. k u bulunur. Kök kuvvetleri e k.o.k a göre, genişletildikten ve kök kuvvetleri eşitlendikten sonra sıralama yapılır.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki kareköklü sayıların eşitlerini yazınız.

a. $\sqrt{25}$

b. $\sqrt{(-5)^4}$

c. $\sqrt{144}$

ç. $\sqrt{375}$

d. $\sqrt{a^2+2a+1}$

e. $-\sqrt{a^2-6a+9}$

f. $\sqrt{49 \cdot 81}$

g. $\sqrt{(-2ab)^2}$

h. $\sqrt{2^6 \cdot 3^4 \cdot 4^2}$

ı. $\sqrt{\frac{a^4}{b^4} - 2 + \frac{b^4}{a^4}}$

2. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\sqrt{12} - \sqrt{48} + \sqrt{27}$

b. $\sqrt{8} + \sqrt{72} + \sqrt{18} - \sqrt{50}$

c. $\sqrt{0,09} + \sqrt{0,04}$

ç. $-\sqrt{45} + \sqrt{1\frac{4}{9}} - \sqrt{1 - \frac{11}{16}}$

d. $\sqrt{\frac{18}{4}} + \sqrt{\frac{50}{9}} - \sqrt{\frac{32}{25}}$

e. $2\sqrt{\frac{1}{4}} + 5\sqrt{\frac{25}{16}} + 6\sqrt{\frac{4}{9}}$

3. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3}\,.\,\sqrt{6}$

b. $\sqrt{3}\,.\,(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{27})$

c. $(1+\sqrt{3})\,.\,(1-\sqrt{3})$

ç. $(\sqrt{3}-1)\,.\,(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)$

d. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

e. $\sqrt{2\,.\,3}\,.\,\sqrt{2^2\,.\,3}$

4. Aşağıdaki kesirlerin paydalarını rasyonel yapınız.

a. $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

b. $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$

c. $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

ç. $\dfrac{5}{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$

d. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$

e. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

5. Aşağıdaki sıralamalardan hangileri doğrudur? Neden?

a. $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$

b. $-3\sqrt{3} < -2\sqrt{5}$

c. $\dfrac{1}{3\sqrt{3}} < \dfrac{1}{5\sqrt{2}}$

ç. $\dfrac{-2}{3\sqrt{5}} < \dfrac{-3}{2\sqrt{3}}$

6. Aşağıdaki sayıları en sade şekilde yazınız.

a. $\sqrt{5-\sqrt{7}} + \sqrt{5+\sqrt{7}}$

b. $\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}}$

7. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a. $\sqrt{x} = x$

b. $2\sqrt{x} = \frac{1}{3}x$

c. $\sqrt{3x+4} = 1$

ç. $3\sqrt{x+3} = x+1$

d. $\sqrt{x-1} = x-1$

e. $x + \sqrt{x+16} = 2x$

8. Aşağıdaki ifadeleri üslü biçimde yazınız.

a. $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$

b. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}$

c. $\sqrt[3]{\dfrac{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{-2}}}$

ç. $\sqrt[4]{64x^6y^8}$

d. $\sqrt[5]{x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^8}$

e. $\sqrt[5]{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^2 \cdot y^{-5}}$

9. Aşağıdaki ifadelerin değerini bulunuz.

a. $\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6 ...}}}$

b. $\sqrt{27:\sqrt{27:\sqrt{27: ...}}}$

c. $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3 + ...}}}$

ç. $\sqrt{12-\sqrt{12-\sqrt{12- ...}}}$

10. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a. $2^{11-4x} = 2^{3-3x}$

b. $3^{x+2} = 4^{2x-3}$

c. $\sqrt{4^{x+1}} + \sqrt[3]{2^{3x-3}} = 10$

TEST I

1. Aşağıdaki ifadelerden hangisi **<u>yanlıştır?</u>**

   A) Doğal sayılar kümesi bölme işlemine göre, kapalı değildir.
   B) Her tam sayının toplama işlemine göre, tersi vardır.
   C) Rasyonel sayılar kümesinde çarpma işlemine göre, birim elemanı 1 dir.
   D) Tam sayılar kümesi, doğal sayılar kümesinin alt kümesidir.

2. (abcabc) altı basamaklı sayı (abc) üç basamaklı sayıya bölünürse bölüm kaç olur?

   A) 11
   B) 101
   C) 1001
   D) 1011

3. Ali bilyelerini beşer, altışar ve sekizer saydığında, her defasında 3 bilyesi artıyor. Onbirer saydığında ise hiç bilyesi artmıyor.Ali'nin **<u>en az</u>** kaç bilyesi vardır.

   A) 123
   B) 242
   C) 369
   D) 374

4. $20^4 \cdot 5^6$ sayısının çarpımlarının sonucu kaç basamaklıdır?

   A) 8
   B) 10
   C) 11
   D) 12

5. 4^5 ; 2^5 ; 5^5 sayıları için aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

   A) $4^5 < 5^5 < 2^5$
   B) $5^5 < 4^5 < 2^5$
   C) $2^5 < 4^5 < 5^5$
   D) $2^5 < 5^5 < 4^5$

6. $\frac{a+7}{a+2}$ ifadesini tam sayı yapan a nın kaç tane değeri vardır?

   A) 2
   B) 3
   C) 4
   D) 5

7. $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ olduğuna göre, x i hangi **en küçük** sayı ile çarpalım ki, sonuç tam sayı olsun?

A) 11
B) 12
C) 13
D) 14

8. a ve b tamsayı olmak üzere, $-4 \leq a \leq 12$ ve $-6 \leq b \leq 8$ ise $3a - 2b$ nin en büyük değeri ile, en küçük değerinin toplamı kaçtır?

A) 14
B) 16
C) 18
D) 20

9. $7x - 2(x + 5) < 4(x + 2) - 9$ eşitsizliğinin doğal sayılarda çözüm kümesi, aşağıdakilerden hangisidir?

A) {1, 2, 3, 4, ...}
B) {9}
C) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }
D) {0, 1, 3, 9}

10. 9^{3k+2} nin, 7 ile bölünmesinde kalan kaçtır?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

11. $a \in R^+$ olmak üzere, $\frac{(-a)^{-2}(-a)^2}{(-a)^{-3}(-a^2)}$ işleminin sonucu, aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-a^2$
B) $-a$
C) a
D) a^2

12. $\frac{3}{0,5} + \frac{1}{0,25} - \frac{1}{0,125}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1\frac{1}{2}$

B) $1\frac{1}{3}$

C) 2

D) 3

13. $\frac{2^{n+1}}{(2^n)^{n-1}} : \frac{4^{n+1}}{(2^{n-1})^{n+1}}$ işlemin sonucu kaçtır?

A) 2^{2n-1}

B) 4^{2n+1}

C) 4^{n+3}

D) 2^{2^2+n}

14. $\frac{2x^{-1}}{x^{\frac{2}{3}}}$ ifadesinin köklü şekilde yazılışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sqrt[3]{x^5}$

B) $2\sqrt[3]{x^5}$

C) $\frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}$

D) $\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}$

15. Ondalık açılımı $1,\overline{37}$ olan rasyonel sayı hangisidir?

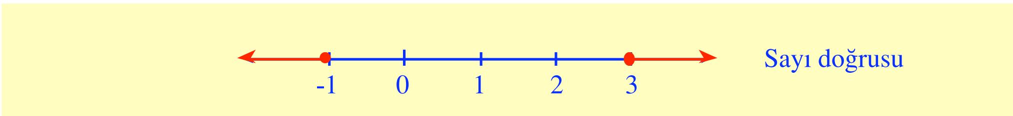
A) $\frac{136}{99}$

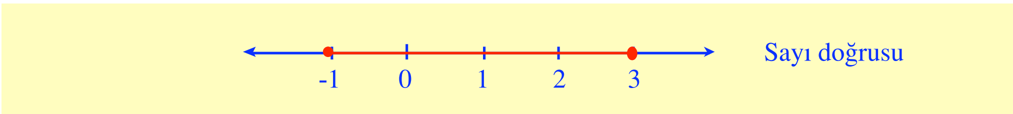
B) $\frac{127}{99}$

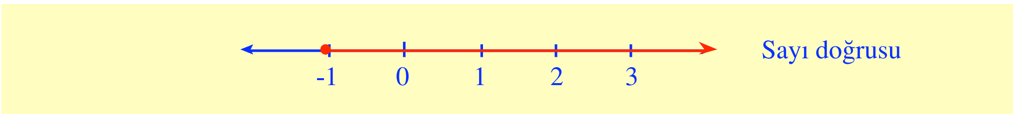
C) $\frac{136}{90}$

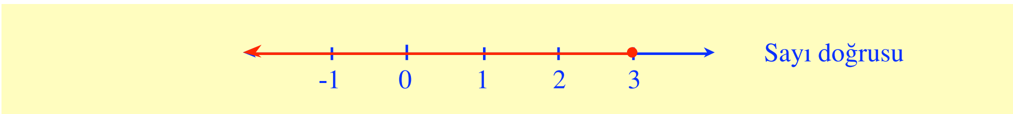
D) $\frac{127}{90}$

16. $|3x - 1| \leq x + 5$ eşitsizliği, hangi sayı doğrusu üzerinde doğru olarak gösterilmiştir?

A) 

B) 

C) 

D) 

17. $x = 3$ ise $|1 - 2x| - |3x - 1| + |2 - x|$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) -4
B) -3
C) -2
D) 0

18. $Z/5$ te, $\overline{4} \text{ x } \oplus \overline{2} = \overline{3}$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{\overline{1}\}$

B) $\{\overline{2}\}$

C) $\{\overline{3}\}$

D) $\{\overline{4}\}$

19. $Z/7$ de, $(\overline{3}\,x + \overline{4}).(\overline{5}x + \overline{3})$ ifadesinin çarpımı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $x^2 + x + \overline{5}$

B) $x^2 + \overline{2}x + \overline{1}$

C) $x^2 + \overline{3}x + \overline{5}$

D) $x^2 + \overline{5}x + \overline{3}$

20. $\dfrac{\sqrt{\frac{4}{5}} + \sqrt{\frac{5}{4}}}{\sqrt{\frac{5}{4}} - \sqrt{\frac{4}{5}}}$ işleminin sonucu, aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1
B) 4
C) 5
D) 9

21. $\sqrt[4]{x^5 \sqrt[5]{x^3}}$ ifadesi, aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sqrt[4]{x^2}$

B) $\sqrt[5]{x^2}$

C) $\sqrt[10]{x^9}$

D) $\sqrt[20]{x^7}$

22. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2} - y}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2\sqrt{x^2+y^2}$

B) $\sqrt{x^2+y^2} - y$

C) $\sqrt{x^2+y^2} + y$

D) $\sqrt{x^2+y^2}$

23. $\sqrt{\sqrt{2}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 1

B) $\sqrt{2}$

C) 2

D) $2\sqrt{2}$

24. $2^{4x+1} = 8^{x-2}$ eşitliğini sağlayan x kaçtır?

A) -7
B) -5
C) 2
D) 4

25. $2^{x-1} \cdot 4^{x} = 256$ ise x kaçtır?

A) 3
B) 5
C) 7
D) 9