- Kalan sınıflar kümesinde, toplama ve çarpma işlemleri ile teoremlerden faydalanarak, işlemlerimizi yapabiliriz.

- Kalan sınıflar kümesinde, toplama ve çarpma işlemlerinde, $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in Z/m$ olmak üzere, $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri için aşağıdaki özelikler vardır.

1. Kapalık özeliği vardır.
2. Değişme özeliği vardır.
3. Birleşme özeliği vardır.
4. Birim (etkisiz) elemanı vardır.
5. Toplama işleminin ters elemanı vardır.
6. $\odot$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerinde sağdan ve soldan dağılma özeliği vardır.

Bu özeliklerden yararlanarak, $(Z/m, \oplus)$ sistemi değişmeli bir gruptur diyebiliriz.

$(Z/m, \odot)$ sistemi ise bir grup değildir. Çünkü bazı tam sayıların çarpma işlemine göre ters elemanı yoktur.

ALIŞTIRMALAR

1. 5^{33} ün 7 ye bölümünden, elde edilecek kalanı bulunuz.

2. 3^{4k+3}, $(k \in N)$ sayısının, 5 ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulunuz.

3. $2^{21} . 5^{13} . + 3 . 32^{12}$ sayısının , 7 ile bölünmesinden elde edilen kalan kaçtır?

4. $17 \equiv 13 \pmod 5$ ifadesi doğru mudur? Neden?

5. $(217)^{63}$ sayısının birler basamağındaki rakam kaçtır?

6. $Z/3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ kümesinde, toplama ve çarpma işlemlerinin tablolarını yapınız.

   Bu tablodan faydalanarak, Z/ 3 de;

   a. Toplama işlemine göre, $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$ elemanlarının tersini yazınız.

   b. Çarpma işlemine göre, $\overline{1}$ ve $\overline{2}$ elemanlarının tersini yazınız.

7. Z / 4 ün toplama ve çarpma tablolarını yapınız. Bu tablolardan faydalanarak aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

   a. $\overline{x} \oplus \overline{3} = \overline{1}$

   b. $\overline{2} \odot \overline{x} = \overline{0}$

   c. $\overline{3} \odot \overline{x} \oplus \overline{1} = \overline{0}$

8. Z / 6 da, $\overline{3} \odot \overline{x} = \overline{3}$ denkleminin çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

9. $Z/5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ kümesinde bir f fonksiyonu, $f(x) = \overline{4} \odot x \oplus \overline{3}$ ile veriliyor. $f(\overline{2})$ ifadesi hangi denklik sınıfına eşittir?

10. $x = 5 \pmod 7$ denklemini sağlayan en büyük negatif tam sayı ile, en küçük pozitif tam sayının toplamı kaçtır?

RASYONEL SAYILAR

Tam sayılar kümesi bölme işlemine göre kapalı değildir. Bu nedenle $4 \, . \, x = 5$ denkleminin çözüm kümesini tam sayılarda bulamayız. Bu tür denklemleri çözmek için, yeni bir kümeye ihtiyaç vardır. Aradığımız küme, tam sayılar kümesini de içine alan ve tam sayılar kümesinden daha geniş olan bir küme olmalıdır. Bu küme rasyonel sayılar kümesidir.

a. Tanım

p ve q birer tam sayı ve $q \neq 0$ olmak üzere, $\frac{p}{q}$ şeklindeki sayılara, rasyonel sayılar denir.

Rasyonel sayılardan oluşan kümeye, rasyonel sayılar kümesi denir. Q ile gösterilir.

$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p . q \in Z \text{ ve } q \neq 0 \right\}$ dır.

$\frac{p}{q}$ kesrinde, p ye pay, q ya da payda denir.

$p < q$ ise $\frac{p}{q}$ kesrine basit kesir ; $p \geq q$ ise $\frac{p}{q}$ kesrine, bileşik kesir denir.

$q = 1$ olması hâlinde, $\frac{p}{q} = p \in Z$ tam sayı olur.

ÖRNEK 1.60

$\frac{1}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{7}, \frac{2}{5}$ gibi sayılar birer rasyonel sayıdır.

$\frac{7}{9}$ rasyonel sayının payı 7, paydası 9 dur.

b. Rasyonel Sayıların Eşitliği

$\frac{p}{q} \in Q$ ve $\frac{r}{s} \in Q$ olmak üzere, $p . s = q . r$ ise bu iki rasyonel sayı birbirine eşittir denir. Bu eşitlik, $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ biçiminde yazılır.

O halde, $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ ise $p . s = q . r$ dir.

ÖRNEK 1.61

$\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$ ise 2 . 12 = 6. 4 ; 24 = 24 olduğundan, rasyonel sayılar eşittir.

$\frac{1}{3}$ ile $\frac{5}{8}$ rasyonel sayıları için, 1 . 8 ≠ 3. 5 ; 8 ≠ 15 olduğundan, $\frac{1}{3} \neq \frac{5}{8}$ olur.

Kesirler arasında eşitlik bağıntısı, kesirler kümesinde bir denklik bağıntısıdır. Buna göre, aşağıdaki özelikleri sağlar.

1. $\frac{p}{q} = \frac{p}{q}$ (Yansıma özeliği)

2. $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ ise $\frac{r}{s} = \frac{p}{q}$ (Simetri özeliği)

3. $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ ve $\frac{r}{s} = \frac{m}{n}$ ise $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ (Geçişme özeliği)

Bir kesrin pay ve paydası, aynı sayma sayısı ile çarpılırsa kesir genişletilmiş, bölünürse sadeleştirilmiş olur. Genişletme ve sadeleştirme işlemlerinin her ikisinde de kesrin değeri değişmez. Bir tek $\frac{p}{q}$ kesrinin genişletme ya da sadeleştirme ile elde edilebilen bütün denk kesirlerin kümesi, bir tek büyüklüğü ifade eder.

c. Rasyonel Sayılar Kümesinde Toplama İşlemi

1. Paydaları eşit olan iki rasyonel sayı toplanırken, payların toplamı pay, payda da payda olarak yazılır.

   $\frac{p}{q}, \frac{r}{q} \in Q$ olmak üzere toplama işlemi, $\frac{p}{q} + \frac{r}{q} = \frac{p+r}{q}$ dür.

2. Paydaları eşit olmayan rasyonel sayılarda ortak payda, paydaların e.k.o.k dur. Buna göre, paydaları eşit olmayan rasyonel sayıları toplayabilmek için, önce paydaları eşitlenir. Sonra paylar toplanarak toplama pay, payda da payda olarak yazılır.

ÖRNEK 1.62

1. $\frac{3}{11} + \frac{5}{11} = \frac{3+5}{11} = \frac{8}{11}$

2. $\underset{(6)}{\frac{5}{5}} + \underset{(5)}{\frac{5}{6}} = \frac{30}{30} + \frac{25}{30} = \frac{55}{30}$

Toplama İşleminin Özelikleri

1. Kapalılık özeliği vardır.

Her $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s} \in Q$ için, $\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) \in Q$ dur.

2. Değişme özeliği vardır.

Her $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s} \in Q$ için, $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}$ dur.

3. Birleşme özeliği vardır.

Her $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$, $\frac{m}{n} \in Q$ için, $\frac{p}{q} + \left(\frac{r}{s} + \frac{m}{n}\right) = \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) + \frac{m}{n}$ dir.

4. Birim elemanı vardır.

Birim elemanı, $e = \frac{0}{1} = 0$ dır.

Her $\frac{p}{q} \in Q$ için, $\begin{cases} \frac{p}{q} + \frac{0}{1} = \frac{p \,.\, 1 + 0 \,.\, q}{q \,.\, 1} = \frac{p + 0}{q} = \frac{p}{q} \text{ dür.} \\ \frac{0}{1} + \frac{p}{q} = \frac{0 \,.\, q + p \,.\, 1}{q \,.\, 1} = \frac{p + 0}{q} = \frac{p}{q} \text{ dür.} \end{cases}$

5. Her elemanın bir tersi vardır.

$\frac{p}{q}$ nun tersi $-\frac{p}{q}$ dur. $-\frac{p}{q} \in Q$ olur.

$$\begin{cases} \frac{p}{q} + \left(-\frac{p}{q}\right) = \frac{p + (-p)}{q} = \frac{0}{q} = 0 \text{ dır.} \\ -\frac{p}{q} + \frac{p}{q} = \frac{-p + p}{q} = \frac{0}{q} = 0 \text{ dır.} \end{cases}$$

O halde, rasyonel sayılar kümesi, toplama işlemiyle birlikte bir değişmeli gruptur. Bu grup (Q, +) şeklinde gösterilir.

Siz de, bazı rasyonel sayılar kullanarak, rasyonel sayılar kümesinde, toplama işleminin özeliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

ç. Rasyonel Sayılar Kümesinde Çarpma İşlemi

İki rasyonel sayının çarpma işleminde, paylar çarpılıp pay ve paydalar da çarpılıp payda olarak yazılır.

Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için, $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}$ olur.

ÖRNEK 1.63

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20}$$

Çarpma İşleminin Özelikleri

1. Kapalılık özeliği vardır.

Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için, $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s} \in Q$ olur.

2. Değişme özeliği vardır.

Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için, $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q}$ olur.

3. Birleşme özeliği vardır.

Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}, \frac{m}{n} \in Q$ için, $\frac{p}{q} \cdot \left(\frac{r}{s} \cdot \frac{m}{n}\right) = \left(\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}\right) \cdot \frac{m}{n}$ dır.

4. Birim elemanı vardır.

Her $\frac{p}{q} \in Q$ için, $\begin{cases} \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b} \text{ dir.} \\ \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1 \cdot a}{1 \cdot b} = \frac{a}{b} \text{ dir.} \end{cases}$

5. Her elemanın tersi vardır

Her $\frac{p}{q} \in Q$ nun $\frac{p}{q} \neq 0$ olmak şartıyla, çarpma işlemine göre, bir tersi vardır.

$\frac{p}{q}$ nun tersi, $\frac{q}{p}$ dır. $\frac{q}{p} \in Q$ dur.

O halde, her $\frac{p}{q} \in Q$ için, $\frac{p}{q} \neq 0$ ise $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$ dir.

6. Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine, sağdan ve soldan dağılma özeliği vardır.

Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}, \frac{m}{n} \in Q$ için,

$$\frac{p}{q} \cdot \left(\frac{r}{s} + \frac{m}{n}\right) = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} + \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}$$

$$\left(\frac{r}{s} + \frac{m}{n}\right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q} + \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$$

d. Rasyonel Sayılar Kümesinde Çıkarma İşlemi

Toplama işleminin özeliklerine göre, her bir rasyonel sayının tersinin, o sayının ters işaretlisi olduğunu gördük. Buna göre,

$\frac{p}{q}$ ile $\frac{r}{s}$ nin tersinin toplamı $\frac{p}{q} + \left(-\frac{r}{s}\right) = \frac{p}{q} - \frac{r}{s}$ dir.

Bu da, $\frac{p}{q}$ den $\frac{r}{s}$ nin çıkarılmasıdır.

Toplama işleminde olduğu gibi, rasyonel sayılar kümesinde çıkarma işlemleri paydaları eşit olan ve olmayan rasyonel sayılarla yapılır.

ÖRNEK 1.64

1. $\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{3-4}{5} = \frac{-1}{5}$

2. $\underset{(4)}{\frac{5}{6}} - \underset{(3)}{\frac{1}{8}} = \frac{4 \cdot 5}{24} - \frac{1 \cdot 3}{24} = \frac{20}{24} - \frac{3}{24} = \frac{17}{24}$

Çıkarma İşleminin Özelikleri

1. Kapalılık özeliği vardır.

Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için, $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} \in Q$ dur.

2. Değişme özeliği yoktur.
3. Birleşme özeliği yoktur.
4. Birim elemanı yoktur.
5. Her elemanın tersi yoktur.

Sizde, rasyonel sayılar kümesindeki sayılarla çıkarma işlemleri yapınız. Çıkarma işleminin özeliklerini doğrulayınız.

e. Rasyonel Sayılar Kümesinde Bölme İşlemi

$\frac{p}{q} \neq 0$ olmak üzere, her $\frac{p}{q} \in Q$ için çarpma işlemine göre, ters elemanın $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$ olduğunu gördük. Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için, $\frac{p}{q}$ nün $\frac{r}{s}$ ile bölümü, $\frac{p}{q}$ nun $\left(\frac{r}{s}\right)^{-1}$ ile çarpımıdır.

O halde, $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{-1} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{p \cdot s}{q \cdot r} \in Q$ olur.

Rasyonel sayılarda bölme işlemi, $\frac{p}{q} : \frac{r}{s}$ veya $\dfrac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}}$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK 1. 65

$\frac{3}{5} : \frac{6}{8} = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{6}{8}\right)^{-1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{6} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 6} = \frac{24}{30}$ olur.

Bölme İşleminin Özelikleri

1. Kapalılık özeliği vardır.

   Her $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için, $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} \in Q$ dur.

2. Değişme özeliği yoktur.
3. Birleşme özeliği yoktur.
4. Birim elemanı yoktur.
5. Her elemanın tersi yoktur.

Siz de, rasyonel sayılar kümesindeki sayılarla bölme işlemleri yapınız. Bölme işleminin özeliklerini doğrulayınız.

f. Rasyonel Sayılarda Sıralama

Rasyonel sayılar, tam sayıların sıfırdan farklı tam sayılara bölünmesiyle elde edilen sayılardır. Bu bakımdan, rasyonel sayılarda sıralama özelikleri ile, tam sayılardaki sıralama özelikleri birbirine uyar.

Önce pozitif ve negatif rasyonel sayıları tanıyalım

$\frac{p}{q} \in Q$ olsun. $p, q \in Z$ olduğundan, $p \,.\, q \in Z$ dir. Buna göre,

1. $p \,.\, q > 0$ ise, $\frac{p}{q} > 0$ dir. $\left(\frac{p}{q}\right.$ pozitif rasyonel sayıdır.$\left.\right)$

2. $p \,.\, q < 0$ ise $\frac{p}{q} < 0$ dır. $\left(\frac{p}{q}\right.$ negatif rasyonel sayıdır.$\left.\right)$

3. $p = 0$ ise $\frac{p}{q} = 0$ dır.

O halde, payı ve paydası aynı işaretli olan rasyonel sayılar pozitif, değişik işaretli olan rasyonel sayılar da, negatif birer sayıdır. Sıfır sayısı, bütün negatif sayılardan büyük, bütün pozitif sayılardan küçüktür.

Pozitif rasyonel sayılar kümesi Q^+, negatif rasyonel sayılar kümesi Q^- ise

$Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$ olur.

ÖRNEK 1. 66

1. $5 \,.\, 6 = 30 > 0$ olduğundan, $\frac{5}{6} > 0$ ya da $\frac{6}{5} > 0$ dır.
2. $(-3)\,(-7) = 21 > 0$ olduğundan, $\frac{-3}{-7} > 0$ ya da $\frac{-7}{-3} > 0$ dır.
3. $(-2)\,(9) = -18 < 0$ olduğundan, $-\frac{2}{9} < 0$ ya da $-\frac{9}{2} < 0$ dır.
4. $0 \,.\, 4 = 0$ olduğundan, $\frac{0}{7} = 0$ dır. $\frac{4}{0}$ ise Belirsizdir.