I. İki Rasyonel Sayı Arasındaki Sıralama

Verilen $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için sıralamayı görelim.

1. $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} > 0$ ise $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ dir. $ps - qr > 0$ olur.

2. $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} < 0$ ise $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ dir. $ps - qr < 0$ olur.

3. $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = 0$ ise $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ dir. $ps - qr = 0$ olur.

Buna göre, $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}$ rasyonel sayılar için, ancak ve ancak aşağıdaki üç halden biri doğrudur. (üç hal kuralı)

1. $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$; 2. $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$; 3. $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ olur.

ÖRNEK 1. 67

1. $\underset{(1)}{\frac{7}{8}} - \underset{(2)}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8} > 0$ olduğundan, $\frac{7}{8} > \frac{1}{4}$ dür.

2. $\underset{(2)}{\frac{3}{5}} - \underset{(1)}{\frac{7}{10}} = \frac{6}{10} - \frac{7}{10} = -\frac{1}{10} < 0$ olduğundan, $\frac{3}{5} < \frac{7}{10}$ dir.

3. $\underset{(3)}{\frac{1}{2}} - \underset{(1)}{\frac{3}{6}} = \frac{3}{6} - \frac{3}{6} = 0$ olduğundan, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ olur.

II. İkiden Fazla Rasyonel Sayı Arasında Sıralama

İkiden fazla rasyonel sayıyı, bir eşitsizlik zinciri içinde sıralayabilmek için, paylar veya paydaları eşit olmalıdır. Buna göre;

a. Paydaları eşit olan pozitif rasyonel sayılardan payı büyük olan, negatif rasyonel sayılarda ise payı küçük olan daha büyüktür.

ÖRNEK 1.68

$\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}$ sayılarını büyükten küçüğe doğru sıralayalım.

$\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}$ sayıları için, $7 > 5 > 3$ olduğundan, $\frac{7}{4} > \frac{5}{4} > \frac{3}{5}$ olur.

b. Payları eşit olan pozitif rasyonel sayılardan paydası küçük olan, negatif rasyonel sayılarda ise paydası büyük olan daha büyüktür.

ÖRNEK 1.69

$\frac{9}{10}, \frac{9}{7}, \frac{9}{13}$ sayılarını büyükten küçüğe doğru sıralayalım.

$\frac{9}{10}, \frac{9}{7}, \frac{9}{13}$ sayıları için, $13 > 10 > 7$ olduğundan, $\frac{9}{7} > \frac{9}{10} > \frac{9}{13}$ olur.

ÖRNEK 1.70

$-\frac{2}{3}, -\frac{2}{7}, -\frac{2}{5}$ sayılarını büyükten küçüğe doğru sıralayalım.

$-\frac{2}{3}, -\frac{2}{7}, -\frac{2}{5}$ sayıları için, $-7 < -5 < -3$ olduğundan, $-\frac{2}{7} > -\frac{2}{5} > -\frac{2}{3}$ olur.

c. Verilen rasyonel sayıların pay veya paydaları eşit değilse, önce paylar veya paydalar eşitlenir. (a) veya (b) şıklarına uygun olarak yapılır.

ÖRNEK 1.71

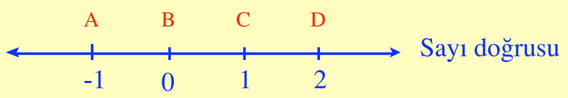
$\frac{7}{18}, \frac{13}{6}, \frac{5}{3}$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

$\underset{(1)}{\frac{7}{18}}, \underset{(3)}{\frac{39}{18}}, \underset{(6)}{\frac{30}{18}}$ sayıların paydalarını eşitleyelim. $\frac{7}{18}, \frac{39}{18}, \frac{30}{18}$ a şıkkına göre,

$7 < 30 < 39$ olduğundan, $\frac{7}{18} < \frac{5}{3} < \frac{13}{6}$ olur.

g. Rasyonel Sayıların Sayı Doğrusu Üzerinde Gösterilmesi

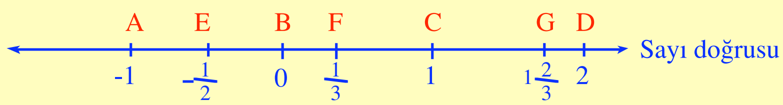
Verilen -1, 0, 1 ve 2 tam sayıların sayı doğrusu üzerinde gösterelim.



Sayı doğrusu üzerinde -1, 0, 1 ve 2 tam sayıların görüntülerini işaretleyelim. -1 in görüntüsü A, 0 ın görüntüsü B, 1 in görüntüsü C ve 2 nin görünüsü C olsun. A ile B tam sayıları arasında başka tam sayı yoktur.

O halde, ardışık iki tam sayının arasında, başka bir tam sayı yoktur.

Şimdi de, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ve $1\frac{2}{3}$ r asyonel sayılarını sayı doğrusu üzerinde gösterelim.



AB doğru parçasının ortası E olsun. E noktasına karşılık gelen sayı $-\frac{1}{2}$ dir. BC ve CD doğru parçalarını üç eşit parçalara ayıralım. Rasyonel sayıların paylarına göre, F noktasına $\frac{1}{3}$ ve G noktasına $1\frac{2}{3}$ karşılık gelir.

O halde, her rasyonel sayı, sayı doğrusunda bir noktaya karşılık gelir.

h. Rasyonal Sayıların Yoğunluğu

Farklı iki rasyonel sayı arasında, bu sayılardan farklı başka bir rasyonel sayı yazabileceğimizi ispatlarsak, rasyonel sayılar kümesinin yoğun olduğunu göstermiş oluruz.

Verilen rasyonel sayılar, $\frac{p}{q} = a$ ve $\frac{r}{s} = b$ olsun.

a < b olmak üzere, bu eşitsizliğin iki yanını a ve b rasyonel sayılarla ayrı ayrı toplayalım.

$a < b$ ise $a + a < b + a$; $2a < a + b$ dir (1)

$a < b$ ise $a + b < b + b$; $a + b < 2b$ dir (2)

(1) ve (2) eşitsizliklerinden, $2a < a + b < 2b$ yazılabilir.

Her iki yanı 2 ile bölünürse, $a < \frac{a + b}{2} < b$ olur.

O halde, iki rasyonel sayı birbirine ne kadar yakın olursa olsun, bunlar arasında daima sonsuz çoklukta başka rasyonel sayılar vardır. Bu nedenle, rasyonel sayılar yoğundur denir.

Bu özeliğe, rasyonel sayıların yoğun olma özeliği denir. Rasyonel sayılar kümesi yoğundur. Tam sayılar kümesi yoğun değildir.

ÖRNEK 1.72

$-\frac{1}{4}$ ile $\frac{3}{2}$ rasyonel sayılarının araasındaki rasyonel sayıyı bulalım.

$-\frac{1}{4}$ ile $\frac{3}{2}$ rasyonel sayıların arasındaki sayı a olsun.

$$a = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{6}{4}}{2} = \frac{\frac{5}{4}}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8} \text{ olur.}$$

Sizde, yazacağınız iki rasyonel sayının arasındaki rasyonel sayıyı bulunuz.

1. Rasyonel Sayıların Ondalık Açılımı

Verilen $\frac{p}{q}$ şeklindeki bir rasyonel sayının, payının paydasına bölünmesiyle elde edilen sayıya, rasyonel sayının ondalık açılımı denir. Ondalık açılıma ondalık kesir denir. Ondalık kesirler, ondalık açılım sonucunda elde edilir.

ÖRNEK 1.73

1. $\frac{1}{2}$ rasyonel sayısının ondalık açılımı 0,5 ondalık kesirdir.

2. $\frac{1}{8}$ rasyonel sayısının ondalık açılımı 0,125 ondalık kesirdir.

I. Sonlu Devirli Ondalık Kesirler

$$\begin{array}{r|l}
19 & 8 \\ \cline{2-2}
-\ 8 & 11,375 \\ \cline{1-1}
11 & \\
-\ 8 & \\ \cline{1-1}
30 & \\
-\ 24 & \\ \cline{1-1}
060 & \\
-\ 56 & \\ \cline{1-1}
040 & \\
-\ 40 & \\ \cline{1-1}
00 &
\end{array}$$

Bölmenin beşinci adımında sıfır olduğundan, bölme işlemi bitmiştir. Bölmeye devam edilirse, bölüm hanesinde sıfırlar devreder. Devreden sıfırlar yazmanın bir gereği olmadığından, sıfırlar yazılmaz. Sıfır devredilmiş gibi düşündüğümüz, bu tür ondalık açılıma, sonlu devirli ondalık kesirler denir.

II. Sonsuz Devirli Ondalık Kesirler

$$\begin{array}{r|l}
20 & 8 \\ \cline{2-2}
-\ 18 & 11,375 \\ \cline{1-1}
020 & \\
-\ 18 & \\ \cline{1-1}
020 & \\
\vdots &
\end{array}$$

$\frac{2}{3} = 0,66 \ldots = 0,\overline{6}$ şeklinde yazabiliriz. Bölümde basamakları devreden ondalık açılımlara, sonsuz devirli ondalık kesirler denir.

O halde, her rasyonel sayının bir devirli ondalık açılımı vardır. Bunun karşıtı da doğrudur. Yani, her devirli ondalık açılıma bir rasyonel sayı karşılık gelir.

Sizde bazı rasyonel sayıların bölme işlemi yaparak, sonlu devirli ondalık kesir veya sonsuz devirli ondalık kesirler olduğunu söyleyiniz.

III. Devirli Ondalık Açılımın Gösterdiği Rasyonel Sayının Bulunuşu

ÖRNEK 1.74

a. $0,\overline{7}$; b. $0,\overline{53}$; c. $0,3\overline{8}$ devirli onlalık açılımlarının gösterdiği rasyonel sayıları bulalım.

a. $x = 0,\overline{7} = 0,777...$ olsun.

$$\begin{array}{rl} 10x &= 7,\overline{7} \\ - \quad x &= 0,\overline{7} \\ \hline 9x &= 7 \\ x &= \frac{7}{9} \end{array}$$

Kural: m bir rakam olmak üzere,

$0,\overline{m} = \frac{m}{9}$ olur.

b. $x = 0,\overline{53} = 0,535353...$ olsun.

$$\begin{array}{rl} 100x &= 53,\overline{53} \\ - \quad x &= 0,\overline{53} \\ \hline 99x &= 53 \\ x &= \frac{53}{99} \end{array}$$

Kural: m ve n birer rakam olmak üzere,

$0,\overline{mn} = \frac{mn}{99}$ olur.

c. $x = 0,3\overline{8} = 0,3888...$ olsun.

$$\begin{array}{rl} 100x &= 38,\overline{8} \\ - \quad 10x &= 3,\overline{8} \\ \hline 90x &= 35 \\ x &= \frac{35}{90} \end{array}$$

Kural: m ve n birer rakam olmak üzere,

$0,m\overline{n} = \frac{(mn) - n}{90}$ olur.

ÖZET

- p ve q birer tam sayı ve $q \neq 0$ olmak üzere, $\frac{p}{q}$ şeklindeki sayılara rasyonel sayılar denir. Rasyonel sayılardan oluşan kümeye, rasyonel sayılar kümesi denir. Q ile gösterilir.

- $\frac{p}{q} \in Q$ kesrinde, p ye pay, q ya da payda denir. $p < q$ ise $\frac{p}{q}$ kesrine basit kesir, $p \geq q$ ise $\frac{p}{q}$ kesrine, bileşik kesir denir.

- $\frac{p}{q} \in Q$ ve $\frac{r}{s} \in Q$ olmak üzere, $p \,.\, s = q \,.\, r$ ise bu iki rasyonel sayı birbirine eşittir denir. $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ şeklinde yazılır. Kesirler arasında eşitlik bağıntısı, kesirler kümeside bir denklik bağıntısıdır.

- Bir kesrin pay ve paydası aynı sayma sayısı ile çarpılırsa kesir genişletilmiş, bölünürse sadeleştirilmiş olur.

- Paydaları eşit olan iki rasyonel sayı toplanırken, payların toplamı pay, payda da payda olarak yazılır.

- Paydaları eşit olmayan rasyonel sayılarda ortak payda, paydaların e.k.o.k u olur. Paydaları eşit olmayan rasyonel sayıları toplayabilmek için, önce paydaları eşitlenir. Sonra paylar toplanarak toplama pay, payda da payda olarak yazılır.

- Toplama işleminin özelikleri
  1. Kapalılık özeliği vardır.
  2. Değişme özeliği vardır.
  3. Birleşme özeliği vardır.
  4. Birim elemanı vardır.
  5. Her elemanın bir tersi vardır.

  Bu özelikleri sağladığından rasyonel sayılar kümesi toplama işlemine göre, değişmeli gruptur. Bu grup (Q, +) şeklinde gösterilir.

- İki rasyonel sayının çarpma işleminde, paylar çarpılıp pay ve paydalar çarpılıp payda olarak yazılır.

- Çarpma işleminin özelikleri
  1. Kapalılık özeliği vardır.
  2. Değişme özeliği vardır.
  3. Birleşme özeliği vardır.
  4. Birim elemanı vardır.
  5. Her elemanın bir tersi vardır.
  6. Çarpma işleminin toplamı işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özeliği vardır.

- Toplama işleminde olduğu gibi çıkarma işlemi de, paydaları eşit veya eşit olmayan rasyonel sayılarla yapılır.

  $\frac{p}{q}$ ile $\frac{r}{s}$ nin tersinin toplamı, $\frac{p}{q} + \left(-\frac{r}{s}\right) = \frac{p}{q} - \frac{r}{s}$ dir. Burada $\frac{p}{q}$ den $\frac{r}{s}$ çıkarılıyor.

  $\frac{p}{q} \neq 0$ olmak üzere, her $\frac{p}{q} \in Q$ için çarpma işlemine göre, ters elemanın

  $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$ olduğundan, $\frac{p}{q}$ nün $\frac{r}{s}$ ile bölümü, $\frac{p}{q}$ nün $\left(\frac{r}{s}\right)^{-1}$ ile çarpımıdır.

  O halde, $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{-1} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{p \cdot s}{q \cdot r}$ dir.

- Rasyonel sayılar, tam sayıların sıfırdan farklı tam sayılara bölünmesiyle elde edilir. $\frac{p}{q} \in Q$ olsun. p, q $\in Z$ olduğundan, p. q $\in Z$ dir. Buna göre,

1. $p \cdot q > 0$ ise $\frac{p}{q} > 0$ dir.
2. $p \cdot q < 0$ ise $\frac{p}{q} < 0$ dır.
3. $p = 0$ ise $\frac{p}{q} = 0$ dır.

Pozitif rasyonel sayılar kümesi Q^+, negatif rasyonel sayılar kümesi Q^- ise $Q = Q^- \cup \{0\} \cup Q^+$ olur.

$\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in Q$ için, rasyonel sayılar için sıralamada,

1. $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} > 0$ ise $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ dir.
2. $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} < 0$ ise $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ dir.
3. $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = 0$ ise $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ olur.

İkiden fazla rasyonel sayıyı, bir eşitsizlik zinciri içinde sıralamak için, payları veya paydaları eşit olmalıdır. Buna göre,

1. Paydaları eşit olan pozitif rasyonel sayılardan payı büyük olan, negatif rasyonel sayılarda ise payı küçük olan daha büyüktür.

2. Payları eşit olan pozitif rasyonel sayılardan paydası küçük olan, negatif rasyonel sayılardan ise paydası büyük olan daha büyüktür.

3. Pay ve paydaları eşit olmayan pozitif veya negatif rasyonel sayılarda sıralama, 1. veya 2. seçeneklere uygun olarak yapılır.

- Her rasyonel sayı, sayı doğrusunda bir noktaya karşılık gelir. Ardışık iki tam sayının arasında başka bir tam sayı yokur.

- Farklı iki rasyonel sayı birbirine, ne kadar yakın olursa olsun bunlar arasında daima sonsuz çoklukta başka rasyonel sayılar vardır. Bu nedenle, rasyonel sayılar yoğundur denir. Bu özeliğe, rasyonel sayıların yoğun olma özeliği denir.

- $\frac{p}{q}$ şeklindeki bir rasyonel sayının, payının paydasına bölünmesi ile elde edilen sayıya, rasyonel sayının ondalık açımı denir. Ondalık açılıma ondalık kesir denir.

- Her rasyonel sayının ondalık açımı vardır. Aynı şekilde devirli ondalık açılımın gösterdiği bir rasyonel sayıda vardır.