ALIŞTIRMALAR

1. $|x| + 3x = 12$ denkleminin çözüm kümesini,

   a. Doğal sayılar kümesinde,
   b. Tam sayılar kümesinde,
   c. Rasyonel sayılar kümesinde,
   ç. Gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

2. Rasyonel sayılar kümesinde, $|2x + 1| = \frac{5}{2}$ denkleminde çözüm kümesini bulunuz.

3. Evrensel küme, reel sayı olmak üzere,aşağıdaki açık önermelerin doğruluk kümesini bulunuz.

   a. $|x - 4| = 3$
   b. $|2x - 3| = 7$
   c. $|3x - 2| = 4$

4. $x \in R$ olmak üzere, aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz. Sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

   a. $|x - 1| < 5$
   b. $|x - 2| > 1$
   c. $|2x - 1| \geq 4$

5. $|3x - 1|$ ifadesinin en küçük değeri alması için, $9x^2 + 3x - 8$ in değeri kaç olmalıdır?

6. $|3x - 1| \leq 3$ açık önermesini doğrulayan kaç tane x tam sayısı vardır.

7. $A = \{x \mid |2x + 1| \leq 11,\ x \in N\}$ kümesini liste biçiminde yazınız.

8. $A = \{x \mid 1 \leq |x + 1| \leq 2,\ x \in R\}$ kümesini liste biçiminde yazınız.

9. $x \in R$ için, $|3x - 3| + 2 = |4 - 4x|$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

10. $|x - 3| = 3 - x$ ve $|x + 4| = x + 4$ eşitliklerinin her ikisini de sağlayan kaç tane tam sayı vardır.

7. ÜSLÜ SAYILAR

Bu bölümde reel sayıların tam kuvvetlerini ve bunlara ait özelikleri inceleyeceğiz. Önce bir reel sayının pozitif tam kuvvetini göreceğiz.

a. Tanım

$x \in R$ ve $n \in Z^+$ olsun. n tane x in çarpılması ile elde edilen reel sayıya, x in n inci kuvveti denir. Bu sayı x^n şeklinde gösterilir.

Buna göre, $x^n = \overbrace{x \,.\, x \,.\, x \ldots x}^{\text{n tane}}$ dir.

x^n ifadesinde, x reel sayısına taban, n ye de üs veya kuvvet denir.

Buna göre, her $x \in R - \{0\}$ için, $x^1 = x$, $x^0 = 1$ ve $0^n = 0$ dir.

0^0 ifadesi tanımsızdır.

ÖRNEK 1.92

a. $2^3 = 2 \,.\, 2.\, 2 = 8$

b. $(-3)^3 = (-3)\,(-3)\,(-3) = -27$

c. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

b. Üslü Sayılarda Çarpma İşlemi

I. Tabanları aynı olan üslü, iki sayıyı çarparken, üsler toplanarak verilen tabana üs olarak yazılır.

ÖRNEK 1.85

a. $2^3 \,.\, 2^6 = 2^{3+6} = 2^9$

b. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2+4} = \left(\frac{1}{3}\right)^6$

c. $(x+1)^2 \,.\, (x+1)^3 = (x+1)^{2+3} = (x+1)^5$

II. Tabanları farklı, üsleri aynı olan üslü iki sayıyı çarparken, ortak üs tabanlar çarpımına üs olarak yazılır.

$x,y \in R$ ve $n \in Z^+$ olmak üzere, $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$ dir.

ÖRNEK 1.86

a. $(-2)^4 \cdot (x)^4 = (-2x)^4 = 16x^4$

b. $(-a)^5 \cdot (-b)^5 = [(-a) \cdot (-b)]^5 = (ab)^5$

c. $\left(\frac{4}{5}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^6 = \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2}\right)^6 = 2^6$

c. Üslü Sayılarda Bölme İşlemi

I. Tabanları aynı olan üslü iki sayının bölme işleminde, payın üssünden paydanın üssü çıkarılır. Verilen tabana üs olarak yazılır. $x \in R - \{0\}$, $m, n \in Z^+$ olmak üzere,

$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ dir.

1. $m > n$ ise, $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ dir.

2. $m = n$ ise, $\frac{x^m}{x^n} = \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = x^0 = 1$ dir.

Sıfırdan farklı bir reel sayının, sıfırıncı kuvveti 1 e eşittir.

3. $m < n$ ise, $\frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}} = x^{-(n-m)} = x^{m-n}$ dir.

ÖRNEK 1.95

a. $\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3$

b. $\frac{(a+b)^3}{(a+b)^3} = (a+b)^{3-3} = (a+b)^0 = 1$

c. $\frac{a^2 b^3}{a^5 b^4} = \frac{1}{a^{5-2} \cdot b^{4-3}} = \frac{1}{a^3 b}$

II. Tabanları farklı, üsleri aynı olan üslü iki sayıyı bölerken, ortak üs altında tabanlar bölünür.

$x \in R,\ y \in R - \{0\},\ n \in Z^+$ için, $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$ dir.

ÖRNEK 1.88

a. $\dfrac{9^4}{3^4} = \left(\dfrac{9}{3}\right)^4 = 3^4$

b. $\dfrac{(x - x^2)^3}{x^3} = \left(\dfrac{x - x^2}{x}\right)^3 = \left(\dfrac{x}{x} - \dfrac{x^2}{x}\right)^3 = (1 - x)^3$

c. $\dfrac{4^2}{(0{,}5)^2} = \left(\dfrac{4}{0{,}5}\right)^2 = \left(\dfrac{4}{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(4 \,.\, \dfrac{2}{1}\right)^2 = 8^2$

ç. Üslü Bir Sayının Kuvveti

Üslü bir sayının kuvvetini bulurken, üs ile kuvvetin çarpımı üslü sayının tabanına üs olarak yazılır.

$x \in R,\ n \in Z^+$ için, $(x^n)^m = x^{nm}$ dir.

ÖRNEK 1.97

a. $(2^3)^4 = 2^{3\,.\,4} = 2^{12}$

b. $(x^a)^{a - b} = x^{a\,(a - b)} = x^{a^2 - a\,b}$

c. $(8x^4)^2 = (2^3\,x^4)^2 = 2^{3\,.\,2}\ .\ x^{4\,.\,2} = 2^6\,x^8$

d. Negatif Üslü Sayılar

Negatif üslü bir sayı, payı 1, paydası pozitif üslü olan bir rasyonel sayıdır. Gerçek sayıların pozitif kuvvetleri ile ilgili bütün özelikler, negatif kuvvetleri içinde geçerlidir.

$n \in Z^+$ ve $x \in R - \{0\}$ için, $\left(\frac{1}{x}\right)^m = \frac{1}{x^m} = x^{-m}$ dir.

ÖRNEK 1.98

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = \frac{1}{2^{-5}} = 2^5$

b. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{\frac{2}{3}}\right)^2 = \left(1 \cdot \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

e. Benzer Üslü Sayılar

Tabanları ve üsleri aynı olan üslü sayılara, benzer üslü sayılar denir.

ÖRNEK 1.99

a. ax^3 ile bx^3 benzer üslü ifadelerdir. Burada, katsayılar etkilemez.

b. $4(a-b)^2$ ile $2(a-b)^2$ ifadeleri de benzer ifadedir.

f. Üslü Sayının Toplamı ve Farkı

Benzer üslü sayıları toplamak veya çıkarmak mümkündür. Üslü sayılar birer reel sayı olduğundan, benzer üslü sayılarda toplama işlemi, çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özeliği yardımıyla yapılır. Toplama veya çıkarma işlemi yapılırken katsayılar birbiri ile toplanır veya çıkarılır.

$ax^n + bx^n - cx^n = (a + b - c)\,x^n$ dir.

ÖRNEK 1.100

a. $5x^3 - 4x^3 + 3x^3 - 2x^3 = (5 - 4 + 3 - 2)\,x^3 = 2x^3$

b. $\frac{1}{2}x^2 - 2x^2 + 6x^2 = \left(\frac{1}{2} - 2 + 6\right)x^2 = \frac{9}{2}x^3$

g. Üslü Sayıların Eşitliği

Tabanları eşit olan iki üslü sayının eşit olabilmesi için, üsleri de eşit olmalıdır.

$n, m \in Z^+$ ve $x \in R - \{-1, 0, 1\}$ için, $x^n = x^m$ ise $n = m$ dir.

ÖRNEK 1.101

$2^{x-1} = 16$ ise x kaçtır?

$2^{x-1} = 2^4$

$x - 1 = 4$

$x = 5$ olur.

h. Çeşitli Örnekler

ÖRNEK 1.102

$7^{2x-4} = 1$ ise x in kaç olduğunu bulalım.

$7^{2x-4} = 7^0$

$2x - 4 = 0$

$2x = 4$

$x = 2$ olur.

ÖRNEK 1.103

$(0{,}04)^2 . (0{,}004)^{-1}$ işleminin sonucunu bulalım.

$$(0{,}04)^2 . (0{,}004)^{-1} = \left(\frac{4}{100}\right)^2 . \left(\frac{4}{1000}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^2 . \left(\frac{1}{250}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{5^2}\right)^2 . (10 . 25)$$

$$= \frac{1}{5^4} . \left(10 . 5^2\right) = \frac{10 . 5^2}{5^4} = \frac{10}{5^2} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK 1.104

$a \neq 0$ ve $b \neq 0$ için $\dfrac{(a^2 b^3)^4}{(a^4 b^2)^2}$ işleminin sonucunu bulalım.

$$\frac{(a^2 b^3)^4}{(a^4 b^2)^2} = \frac{a^8 b^{12}}{a^8 b^4} = a^{8-8} b^{12-4} = a^0 b^8 = b^8 \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK 1.105

$3^{n-1} + 3^n + 3^{n+1}$ işleminin sonucunu bulalım.

$3^{n-1} + 3^n + 3^{n+1} = \dfrac{3^n}{3} + 3^n + 3^n . 3 = \left(\dfrac{1}{3} + 1 + 3\right) 3^n = \dfrac{13}{3} 3^n$

$= \dfrac{13}{3} 3^n = 13 . 3^{n-1}$ olur.

ÖRNEK 1.106

$x^{0,4} = 4$ ise x in kaç olduğunu bulalım.

$x^{0,4} = 4$; $x^{\frac{4}{10}} = 2^2$; $x^{\frac{2}{5}} = 2^2$; $x^{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2}} = 2^{2 \cdot \frac{5}{2}}$; $x = 2^5 = 32$ olur.

ÖZET

- $x \in R$ ve $n \in Z^+$ olsun. n tane x in çarpılması ile elde edilen reel sayıya, x in n inci kuvveti denir. Bu sayı x^n şeklinde gösterilir.

  Buna göre, $x^n = \overbrace{x \,.\, x \,.\, x \ldots x}^{n \text{ tane}}$ dir.

  x^n ifadesinde, x reel sayısına taban, n ye de üs veya kuvvet denir.

- Tabanları aynı olan üslü, iki sayıyı çarparken, üsler toplanarak verilen tabana üs olarak yazılır.

  $x \in R$ ve $m, n\ Z^+$ olmak üzere, $x^m \,.\, x^n = x^{m+n}$ dir.

- Tabanları farklı, üsleri aynı olan üslü iki sayıyı çarparken, ortak üs tabanlar çarpımına üs olarak yazılır.

  $x, y \in R$ ve $n \in Z^+$ olmak üzere, $x^m \,.\, y^n = (x \,.\, y)^n$ dir.

- Tabanları aynı olan üslü iki sayının bölme işleminde, payın üssünden paydanın üssü çıkarılır. Verilen tabana üs olarak yazılır.

  $x \in R - \{0\}$, $m, n \in Z^+$ olmak üzere, $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ dir.

- Tabanları farklı, üsleri aynı olan üslü iki sayıyı bölerken, ortak üs altında tabanlar bölünür.

  $x \in R$, $y \in R - \{0\}$, $n \in Z^+$ için, $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$ dir.

- Üslü bir sayının kuvvetini bulurken, üs ile kuvvetin çarpımı üslü sayının tabanına üs olarak yazılır.

  $x \in R$, $n \in Z^+$ için, $(x^n)^m = x^{nm}$ dir.

- Negatif üslü bir sayı, payı 1, paydası pozitif üslü olan bir rasyonel sayıdır. Gerçek sayıların pozitif kuvvetleri ile ilgili bütün özelikler, negatif kuvvetleri içinde geçerlidir

  $n \in Z^{+}$ ve $x \in R, - \{0\}$ için, $\left(\frac{1}{x}\right)^{m} = \frac{1}{x^{m}} = x^{-m}$ dir.

- Tabanları ve üsleri aynı olan üslü sayılara, benzer üslü sayılar denir.

- Üslü sayılar birer reel sayı olduğundan, benzer üslü sayılarda toplama işlemi, çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özeliği yardımıyla yapılır. Toplama veya çıkarma işlemi yapılırken katsayılar birbiri ile toplanır veya çıkarılır.

- Tabanları eşit olan iki üslü sayının eşit olabilmesi için üsleri de eşit olmalıdır.