**ÖRNEK 1.4**

Aşağıda verilen işlemleri yapalım.

1. $2^3 . 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

2. $(5^2)^3 = 5^{2 . 3} = 5^6$

3. $(3 . 7)^2 = 3^2 . 7^2$

**ÖRNEK 1. 5**

$a \in N$ ve $(4a^2)^3 . (a^3)^4 = 2^m . a^n$ ise m ve n doğal sayılarının değerlerini bulalım.

$4^3 . a^6 . a^{12} = 2^m a^n$

$(2^2)^3 . a^{6+12} = 2^m a^n$

$2^6 . a^{18} = 2^m a^n$

tabanları eşit olan sayıların üsleride eşit olacağından, m = 6 ve n = 18 olur.

**ÖRNEK 1.6**

$32 . 125^2$ sayısının kaç basamaklı olduğunu bulalım.

$32 . 125^2 = 2^5 . (5^3)^2 = 2^5 . 5^6 = 2^5 . 5^5 . 5$

$= (2 . 5)^5 . 5 = 10^5 . 5$ dir.

Buna göre, 5 sayısının yanına 5 tane sıfır yazarsak, bu sayının 5 + 1 = 6 basamaklı olur.

**ç. Asal Sayılar**

Birden büyük olan, bir ve kendisinden başka böleni olmayan doğal sayılara asal sayı denir.

2 nin bölenleri 1 ile 2 dir. Bölenler kümesi {1, 2} olduğundan, 2 asal sayıdır.

3 ün bölenleri 1 ile 3 tür. Bölenler kümesi {1, 3} olduğundan, 3 özel sayıdır.

4 ün bölenleri 1, 2, 4 tür. Bölenler kümesi {1, 2, 4} olduğundan, 4 asal sayı değildir.

O halde, bölenler kümesi iki elemanlı olan doğal sayılara asal sayı denir. Buna göre; 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... sayıları asal sayılardır. 2 hariç bütün asal sayılar tek doğal sayılardır. Asal sayılar kümesini: $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...\}$ şeklinde yazabiliriz.

$a, b, c \in N$ için, $a = b . c$ oluyorsa b ile c doğal sayılarına, a nın çarpanları denir. b ve c asal sayı ise, b ile c sayılarına, a nın asal çarpanları denir.

Birden başka ortak böleni olmayan iki doğal sayıya, aralarında asaldır denir.

**ÖRNEK 1. 7**

Aşağıdaki sayılardan hangilerinin aralarında asal sayı olup olmadığını gösterelim.

1. 7 ve 13 sayılarının aynı anda 1 den başka ortak böleni olmadığından, 7 ile 13 sayıları aralarında asal sayıdır.
2. 25 ile 45 sayılarının her ikisini de 5 sayısını böler. 25 ve 45 sayıları aralarında asal değildir.
3. 18 ile 215 sayılarının ortak böleni 1 dir. 18 ve 215 sayıları aralarında asaldır.

**ÖRNEK 1.8**

Sıfır, bir ve iki doğal sayılarının asal sayı olup olmadığını araştıralım.

- Sıfır (0) asal sayı değildir. Çünkü, bölenleri kümesi sonsuz bir kümedir.
- Bir (1) asal sayı değildir. Çünkü bölenleri kümesi bir elemanlıdır, kendisinden başka çarpanı yoktur.
- İki (2) en küçük bir asal sayıdır.

**ÖRNEK 1.9**

x ve y birer doğal sayıdır. $(3x - 2)$ ve $(2y + 1)$ sayıları aralarında asal ve $\frac{3x - 2}{2y + 1} = \frac{7}{5}$ bağıntısı vardır. Buna göre, $x . y$ nin kaç olduğunu bulalım.

7 ile 5 sayıları aralarında asal olduğu için, $3x - 2 = 7$ ve $2y + 1 = 5$ sayıları da asaldır.

Buna göre,

$3x - 2 = 7$ ; $3x = 7 + 2$ ; $3x = 9$ ; $x = 3$ tür.

$2y + 1 = 5$ ; $2y = 5 - 1$ ; $2y = 4$ ; $y = 2$ dir.

O halde, $x . y = 3 . 2 = 6$ olur.

## d. Bölünebilme Kuralları

### I. 2 ile Bölünebilme Kuralı

Herhangi bir doğal sayının birler basamağında; 0, 2, 4, 6, 8 rakamlarından biri var ise, bu sayı 2 ile tam bölünebilir. Yani çift sayılar 2 ile tam olarak bölünebilir.

**ÖRNEK 1.10**

Aşağıdaki sayılardan hangilerinin 2 ile tam bölünüp, bölünemeyeceğini gösterelim.

1. 432 sayısının birler basamağındaki rakam 2 çift sayı olduğundan, 2 ile tam bölünebilir.
2. 720 sayısının birler basamağındaki rakam 0 çift sayı olduğundan, 2 ile tam bölünebilir.
3. 321 sayısının birler basamağındaki rakam 1 çift sayı olmadığından, 2 ile tam bölünemez.

Bir basamağında 1, 3, 5, 7, 9 rakamlarından biri bulunan sayılar, 2 ile kalansız bölünemezler. Bu sayıların 2 ile bölümünden, kalan 1 dir.

### II. 3 ile Bölünebilme Kuralı

Herhangi bir doğal sayının basamaklarındaki rakamların sayı değerleri toplamı, 3 ve 3'ün katı ise bu doğal sayı 3 ile tam bölünebilir.

**ÖRNEK 1.11**

1. 3615 sayısının rakamlarının sayı değerleri toplamı, $3 + 6 + 1 + 5 = 15$ dir.

   15 sayısı, 3 ün katı olduğundan, 3615 sayısı 3 ile tam bölünebilir.
2. 57223 sayısının rakamlarının sayı değerleri toplamı, $5 + 7 + 2 + 2 + 3 = 19$ dur.

   19 sayısı, 3 ün katı olmadığından, 57223 sayısı 3 ile tam bölünemez.
3. Dört basamaklı 4a13 sayısının 3 ile tam bölünebilmesi için, "a" nın alabileceği değerleri bulalım.

   $4 + a + 1 + 3 = 8 + a$ dır. $8 + a$ nın 3 ün katı bir sayı olabilmesi için, a nın alabileceği değerler, 1, 4 ve 7 olur.

### III. 4 ile Bölünebilme Kuralı

Herhangi bir doğal sayının birler ve onlar basamağındaki rakamlarının oluşturduğu iki basamaklı sayı, 4 ile bölünüyorsa bu sayı 4 ile tam bölünebilir.

**ÖRNEK 1.12**

Aşağıdaki sayılardan hangilerinin, 4 ile tam bölünüp, bölünemeyeceğini gösterelim.

1. 4340 sayısında, 40; 4 ün katı olduğundan, 4340 sayısı 4 ile tam bölünebilir.
2. 1900 sayısında 00; 4 ün katı olduğundan, 1900 sayısı 4 ile tam bölünebilir.
3. 8822 sayısında, 22; 4 ün katı olmadığından, 8822 sayısı 4 ile tam bölünemez.

### IV. 5 ile Bölünebilme Kuralı

Herhangi bir doğal sayının, birler ve onlar basamağındaki rakamı 0 veya 5 olan sayılar, 5 ile tam bölünebilir.

**ÖRNEK 1.13**

Aşağıdaki sayılardan hangilerinin, 5 ile tam bölünüp, bölünemeyeceğini gösterelim.

1. 845 sayısının birler basamağı 5 olduğundan, 845 sayısı 5 ile tam bölünebilir.
2. 342 sayısının birler basamağı 2 olduğundan, 342 sayısı 5 ile tam bölünemez.
3. 1780 sayısının birler basamağı 0 olduğundan, 1780 sayısı 5 ile tam bölünebilir.

### V. 8 ile Bölünebilme Kuralı

Herhangi bir doğal sayının son üç basamağı 8 in katı veya 000 olan sayılar 8 ile tam bölünebilir.

**ÖRNEK 1.14**

Aşağıdaki sayılardan hangilerinin 8 ile tam bölünüp, bölünemeyeceğini gösterelim.

1. 5480 sayısında, 480; 8 in katı olduğundan, 5480 sayısı 8 ile tam bölünebilir.
2. 2800 sayısında, 800; 8 in katı olduğundan, 2800 sayısı 8 ile tam bölünebilir.
3. 8972 sayısında, 972; 8 in katı olmadığından, 8972 sayısı 8 ile tam bölünemez.

### VI. 9 ile Bölünebilme Kuralı

Herhangi bir doğal sayının rakamlarının toplamı 9 veya 9 un katı olan sayılar, 9 ile tam bölünebilir.

**ÖRNEK 1.15**

Aşağıdaki sayılardan hangilerinin 9 ile tam bölünüp, bölünemeyeceğini gösterelim.

1. 57636 sayısının rakamlarının sayı değerleri toplamı, $5 + 7 + 6 + 3 + 6 = 27$ dir. 27 sayısı 9 un katı olduğundan, 57636 sayısı 9 a tam bölünebilir.

2. 36510 sayısının rakamlarının sayı değerleri toplamı, $3 + 6 + 5 + 1 + 0 = 15$ dir. 15 sayısı 9 un katı olmadığından, 36510 sayısı 9 a tam bölünemez.

3. 2ab6 dört basamaklı bir sayıdır. Bu sayı 9 ile tam bölünebildiğine göre, $a + b$ nin en fazla kaç olabileceğini bulalım.

Dört basamaklı 2ab6 sayısı 9 ile tam bölünebildiğine göre,

$2 + a + b + 6 = a + b + 8$ sayısının toplamı 9 un katı olmalıdır.

$a + b + 8 = 9$ veya $a + b + 8 = 18$ olabilir. Buradan,

$a + b = 1$ veya $a + b = 10$ olur.

O halde, $a + b$ en fazla 10 olur.

**VII. 11 ile Bölünebilme Kuralı**

Herhangi bir doğal sayının basamaklarındaki rakamları, sağdan sola doğru birer basamak atlayarak, sayı değerlerini toplayalım. Bu toplamdan, arada kalan basamaklardaki rakamların sayı değerleri toplamını çıkalım. Fark (0) sıfır veya 11 in katı ise bu sayı 11 ile tam bölünebilir.

**ÖRNEK 1.16**

1. 542135 sayısının 11 ile tam bölünüp, bölünemeyeceğini gösterelim.

$5\underline{4}2\underline{1}3\underline{5}$ sayısında, işaretlediğimiz rakamların sayı değerleri toplamından, arada kalan rakamların sayı değerleri toplamını çıkaralım.

$(5 + 1 + 4) - (3 + 2 + 5) = 10 - 10 = 0$ olduğundan, 542135 sayısı 11 ile tam bölünebilir.

2. 71423 sayısının 11 ile tam bölünüp, bölünemeyeceğini gösterelim.

$\underline{7}1\underline{4}2\underline{3}$ sayısında, işaretlediğimiz rakamların sayı değerleri toplamından, arada kalan rakamların sayı değerleri toplamını çıkaralım.

$(7 + 4 + 3) - (2 + 1) = 14 - 3 = 11$ olduğundan, 71423 sayısı 11 ile tam bölünebilir.

3. 269218 sayısının 11 ile bölünüp, bölünemeyeceğini bulalım.

$2\underline{6}9\underline{2}1\underline{8} = (8 + 2 + 6) - (1 + 9 + 2) = 16 - 12 = 4$ olduğundan, 269218 sayısı 11 ile tam bölünemez.

**e. Aralarında Asal Sayıların Çarpımı ile Bölünebilme**

a ile b aralarında asal iki sayı olsun. Hem a, hem de b ile tam bölünebilen her sayı a . b ile de tam bölünebilir.

a doğal sayısı ile tam bölünebilen bir sayı, a nın her çarpanı ile de tam bölünebilir.

O halde, farklı iki sayı ile ayrı ayrı tam bölünebilen bir doğal sayı, bu asal sayıların çarpımı ile de tam bölünebilir.

**ÖRNEK 1.17**

Hem 2 hemde 3 ile bölünebilen sayılar 2 . 3 = 6 sayısı ile de tam bölünebilir.

Buna göre, aşağıdaki sayılardan hangileri 6 ile tam bölünüp, bölünemeyeceğini gösterelim.

1. 5046 sayısı, 3 ile hem de 2 ile tam bölünüyor. Bu sayı 6 ile de tam bölünebilir.
2. 3927 sayısı, 3 ile tam bölünüyor, ancak 2 ile tam bölünemez. Bu sayı 6 ile de tam bölünemez.
3. 73112 sayısı, 2 ile tam bölünüyor, ancak 3 ile tam bölünemez. Bu sayı 6 ile de tam bölünemez.

**ÖRNEK 1.18**

Hem 3 hem de 5 ile tam bölünebilen sayılar 3 . 5 = 15 sayısı ile de tam bölünebilir.

Buna göre, 60 sayısının 15 sayısı ile tam bölünüp, bölünemiyeceğini gösterelim.

15 = 3 . 5 gibi asal sayılara ayırabiliriz.

60 sayısı 3 ile tam bölünebilir. 60 : 3 = 20 dir.

60 sayısı 5 ile tam bölünebilir. 60 : 5 = 12 dir.

O halde, 60 sayısı 3 ile 5 sayısının çarpımı olan 15 sayısı ile de tam bölünebilir.

**ÖRNEK 1.19**

Dört basamaklı 96a5 sayısının 15 ile tam bölünebilmesi için, a yerine yazılabilecek rakamların kümesini yazalım.

96a5 sayısının 15 ile tam bölünebilmesi için, bu sayı 15 = 3. 5 olduğundan, hem 3 hem de 5 ile tam bölünebilmelidir. Birler basamağındaki rakam 5 olduğundan 96a5 sayısı 5 ile tam bölünüyor. 96a5 sayısının 3 ile de tam bölünebilmesi için, basamaklarındaki rakamların sayı değerlerinin toplamı olan, 9 + 6 + a + 5 = 20 + a sayısı 3 ün katı olmalıdır. Buna göre, a yerine, 1, 4, 7 rakamlarından biri yazılabilir.

O halde, a yerine yazılabilecek rakamların kümesi {1, 4, 7} olur.

### f. En Büyük Ortak Bölen (EBOB)

İki ya da daha çok doğal sayının her birini tam bölen en büyük sayma sayısına, bu sayıların en büyük ortak böleni denir. (EBOB) şeklinde yazılabilir.

**ÖRNEK 1.20**

90 ve 72 sayılarının en büyük ortak bölenini (EBOB) bulalım.

90 ve 72 sayıların EBOB, hem 90 ve hem de 72 yi tam bölen en büyük doğal sayıdır. Bu iki sayının EBOB bulmak için,

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 90 | 2 | | 72 | 2 |
| 45 | 3 | | 36 | 2 |
| 15 | 3 | | 18 | 2 |
| 5 | 5 | | 9 | 3 |
| | 1 | | 3 | 3 |
| | | | | 1 |

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$72 = 2^3 \cdot 3^2$ olduğundan,

EBOB $(90 ; 72) = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$ olur.

EBOB bulurken, 90 ve 72 nin asal çarpanlarından ortak olanların en küçük üslüleri alınıp çarpılır.

### g. En Küçük Ortak Kat (EKOK)

İki ya da daha çok doğal sayının, ortak katlarından en küçüğüne, bu sayıların en küçük ortak katı denir. (EKOK) şeklinde yazılabilir.

**ÖRNEK 1. 21**

24 ve 84 sayılarının en küçük ortak katını (EKOK) bulalım.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 2 | | 84 | 2 |
| 12 | 2 | | 42 | 2 |
| 6 | 2 | | 21 | 3 |
| 3 | 3 | | 7 | 7 |
| | 1 | | | 1 |

$24 = 2^3 \cdot 3$

$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ EKOK $(24, 84) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 8 \cdot 21 = 168$ dir.

EKOK bulurken, 24 ve 84 ün asal çarpanlarından üsleri en büyük olanlar ile ortak olmayanların hepsinin çarpımı yapılır.

### h. Doğal Sayılarda Sıralama

a ve b doğal sayıları verilsin. $a + c = b$ olacak şekilde bir $c \in N^+$ varsa, "a sayısı b sayısından küçüktür"denir. $a < b$ şeklinde gösterilir.

O halde, $a < b$ ise $a + c = b$ olacak şekilde, mutlaka bir $c \in N^+$ sayısı vardır. $a < b$ yerine, $b > a$ da yazılabilir. $a \leq b$ ise $a < b$ veya $a = b$ şeklindedir.

**ÖRNEK 1. 22**

1. $5 + 9 = 14$ ise $5 < 14$ dür.
   $5 + 9 = 14$ ise $9 < 14$ dür.
2. $8 < 12$ ise $8 + 4 = 12$ olacak şekilde bir $4 \in N$ vardır.
3. $5 < 11$ ve $11 < 13$ ise $5 < 13$ olur.

**Doğal Sayılarda Sıralamanın Özelikleri**

1. Her $a, b \in N$ için, aşağıdaki üç durumdan, yalnız ve yalnız birisi doğrudur.
   (1) $a < b$ ; (2) $a > b$ ; (3) $a = b$
2. Her $a, b, c \in N$ için, $a < b$ ve $b < c$ ise $a < b$ (Geçişme özeliği)
3. Her $a, b, c \in N$ için, $a + c < b + c$ ise $a < b$ (Sadeleştirme)
4. Her $a, b \in N$ ve $c \in N^+$ için, $a . c < b . c$ ise $a < b$ (Sadeleştirme)
5. $a < b$ ve $c < d$ ise $a + c < b + d$ (Eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir)

*Sizde doğal sayılarda sıralamanın özeliklerine ait doğal sayılarla çeşitli işlemler yaparak doğruluğunu gösteriniz.*

## ÖZET

* Sonlu bir kümenin elemanlarının kaç tane olduğunu belirten 0, 1, 2, 3, ..., n, ... sayılarından her birine, doğal sayı denir. Bütün sonlu kümelerin eleman sayılarının kümesine, doğal sayılar kümesi denir. N ile gösterilir.

* Sıfırın dışındaki bütün doğal sayılara, sayma sayıları denir. Sayma sayılar kümesi $N^+$ ile gösterilir.

* İki ile bölünebilen doğal sayılara, çift doğal sayılar, iki ile bölünemeyen doğal sayılara da, tek doğal sayılar denir.

* a ve n birer doğal sayı ve $n \neq 0$ olmak üzere, n tane a nın çarpılmasından elde edilen sayıya, a nın n inci kuvveti denir. $a^n$ şeklinde yazılır.

$a^m . a^n = a^{m+n}$ ; $(a^m)^n = a^{mn}$ ; $(a . b)^n = a^n b^n$ dir.

* a, b, m, n doğal sayılar $a \neq 0$, $b \neq 0$ olmak üzere,

* Birden büyük olan, bir ve kendisinden başka böleni olmayan doğal sayılara, asal sayı denir.

* a, b, c $\in$ N için, a = b . c oluyorsa b ile c doğal ayılarına, a nın çarpanları denir. b ile c asal sayı ise bunlara a nın asal çarpanları denir.

* Birden başka ortak böleni olmayan iki doğal sayıya, aralarında asaldırlar denir.

* **2 ile bölünebilme kuralı:** Herhangi bir doğal sayının, birler basamağında, 0, 2, 4, 6, 8 rakamlarından biri var ise bu sayı 2 ile tam bölünebilir.

* **3 ile bölünebilme kuralı:** Herhangi bir doğal sayının, basamaklarındaki rakamların sayı değerleri toplamı, 3 ve 3 ün katı ise bu doğal sayı 3 ile tam bölünebilir.

* **4 ile bölünebilme kuralı:** Herhangi bir doğal sayının, birler ve onlar basamağındaki rakamların oluşturduğu iki basamaklı sayı 4 ile bölünüyorsa, bu sayı 4 ile tam bölünebilir.