1.2 Küme Dizilerinin Yakınsaklığı

SORU 1: (a) (A_n) artan bir dizi olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

gerçeklenir. Gösteriniz.

(b) (B_n) azalan bir dizi olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

gerçeklenir. Gösteriniz.

ÇÖZÜM 1: (a) $\limsup A_n = \liminf A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ olduğunu göstermeliyiz. (A_n) dizisi artan olduğundan

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ve

$$\liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{m=1}^{\infty}(A_m \cap A_{m+1} \cap ...) = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$$

bulunup istenilen elde edilmiş olur.

(b) $\limsup B_n = \liminf B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ olduğunu göstermeliyiz. (B_n) dizisi azalan olduğundan

$$\limsup B_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} B_n\right) = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$$

ve

$$\begin{aligned}
\liminf B_n &= \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} B_n\right) \\
&= \bigcup_{m=1}^{\infty}(B_m \cap B_{m+1} \cap \ldots) \\
&= \bigcup_{m=1}^{\infty}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n \cap \ldots) \\
&= \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n
\end{aligned}$$

bulunur.

SORU 2: (A_n), X kümesinin alt kümelerinin ayrık bir dizisi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM 2: $m \neq n$ olmak üzere $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $A_n \cap A_m = \emptyset$ dır. $\limsup A_n = \liminf A_n = \emptyset$ olduğunu göstermeliyiz. (A_n) dizisi ayrık olduğundan

$$\liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right) = \emptyset$$

sağlanır. Şimdi kabul edelim ki $\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \neq \emptyset$ olsun.

Bu durumda $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\exists x_0 \in \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$ vardır. Bu ise $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ $(m_0 \geq m) \ni x \in A_{m_0}$ olmasını gerektirir. Arakesit işlemini $m = m_0 + 1$ için başlatırsak x elemanı $m_0 + 1$ ve daha sonraki indislere sahip bir kümenin elemanı olmak zorundadır. Bu ise (A_n) dizisinin ayrık olması ile çelişir. Dolayısıyla $\limsup A_n = \emptyset$ olmak zorundadır. Sonuç olarak $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \emptyset$ elde edilir.

SORU 3: Aşağıda genel terimleri verilen küme dizilerinin yakınsaklığını inceleyiniz.

(a) $A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$

(b) $B_n = \{-n, ..., -1, 0, 1, ..., n\}$

ÇÖZÜM 3: **(a)** $\forall n \in \mathbb{N}$ için $-\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ olduğundan (A_n) dizisi azalan bir dizidir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

olmalıdır.

$$\begin{aligned}
\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n &= A_1 \cap ... \cap A_n \cap ... \\
&= [-1, 1] \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap ... \cap \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \cap ... \\
&= \{0\}
\end{aligned}$$

olup $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \{0\}$ elde edilir.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $B_n \subset B_{n+1}$ olduğundan (B_n) artan bir dizidir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

olmalıdır.

$$\begin{aligned}\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n &= \{-1,0,1\} \cup \{-2,-1,0,1,2\} \cup ... \\ &= \mathbb{Z}\end{aligned}$$

olup $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \mathbb{Z}$ gerçeklenir.

SORU 4:

$$E_n = \begin{cases} \left(0, \frac{1}{n}\right) & ; \quad n \text{ tek ise} \\ \left[\frac{1}{n}, 1\right) & ; \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (E_n) dizisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

ÇÖZÜM 4:

$$\begin{aligned} A_n &= \left(0, \frac{1}{2n-1}\right) \\ B_n &= \left[\frac{1}{2n}, 1\right) \end{aligned}$$

olmak üzere (A_n) ve (B_n) dizileri (E_n) dizisinin alt dizileridir.

(A_n) azalan dizi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

dir.

(B_n) artan dizi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = (0,1)$$

olur.

(E_n) dizisinin alt dizilerinin limiti birbirlerinden farklı olduğundan (E_n) dizisinin limiti mevcut değildir.

SORU 5:

$$E_n = \begin{cases} A & ; \quad n \text{ çift ise} \\ B & ; \quad n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (E_n) dizisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

ÇÖZÜM 5:

$$\limsup E_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n \right) = \bigcap_{m=1}^{\infty} (E_m \cup E_{m+1} \cup ...) = A \cup B$$

ve

$$\liminf E_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{\infty} E_n \right) = \bigcup_{m=1}^{\infty} (E_m \cap E_{m+1} \cap ...) = A \cap B$$

olup $\limsup E_n \neq \liminf E_n$ olduğundan $\lim E_n$ mevcut değildir.

SORU 6: (E_n) herhangi bir dizi ve F herhangi bir küme olsun.

(a) $F \backslash \limsup E_n = \liminf (F \backslash E_n)$

(b) $F \backslash \liminf E_n = \limsup (F \backslash E_n)$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM 6: (a)

$$\begin{aligned}
F\backslash \limsup E_n &= F\backslash\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n\right)\right) \\
&= F\cap\left\{\bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n\right)\right\}^t \\
&= F\cap\left\{\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n\right)^t\right\} \\
&= F\cap\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} E_n^t\right) \\
&= \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(F\cap\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} E_n^t\right)\right) = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left(F\cap E_n^t\right) = \liminf\left(F\backslash E_n\right)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
F\backslash \liminf E_n &= F\backslash\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} E_n\right) \\
&= F\cap\left\{\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} E_n\right)\right\}^t \\
&= F\cap\left\{\bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n^t\right)\right\} \\
&= \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(F\cap\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n^t\right)\right) = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\left(F\cap E_n^t\right) = \limsup\left(F\backslash E_n\right)
\end{aligned}$$

SORU 7: Sınırlı bir (x_n) dizisi için

(a) $\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$

(b) $\liminf(-x_n) = -\limsup x_n$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM 7: (a)

$$\begin{aligned}
\limsup(-x_n) &= \inf_{m\geq 1}\left(\sup_{n\geq m}(-x_n)\right) \\
&= \inf_{m\geq 1}\left(-\left(\inf_{n\geq m} x_n\right)\right) \\
&= -\sup_{m\geq 1}\left(\inf_{n\geq m} x_n\right) = -\liminf x_n
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\liminf(-x_n) &= \sup_{m\geq 1}\left(\inf_{n\geq m}(-x_n)\right) \\
&= \sup_{m\geq 1}\left(-\left(\sup_{n\geq m} x_n\right)\right) \\
&= -\inf_{m\geq 1}\left(\sup_{n\geq m} x_n\right) = -\limsup x_n
\end{aligned}$$

SORU 8: (A_n), X kümesinin alt kümelerinin bir dizisi olsun.

$$\emptyset \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset X$$

gerçeklenir.

ÇÖZÜM 8: Keyfi $x \in \liminf A_n$ için $x \in \limsup A_n$ olduğu gösterilmelidir. Ya da bu önermenin kontro pozitifi olan $x \notin \limsup A_n$ ise $x \notin \liminf A_n$ önermesinin doğru olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla

$$\begin{aligned}
x \notin \limsup A_n &\implies x \notin \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \\
&\implies \forall m \in \mathbb{N} \text{ için } \exists m_0 \geq m \ \ (m_0 \in \mathbb{N})\,, \ni \ x \notin \bigcup_{n=m_0}^{\infty} A_n \\
&\implies \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ ve } \forall n \geq m_0 \text{ için } x \notin A_n \\
&\implies \exists m_0 \in \mathbb{N} \ni x \notin \bigcap_{n=m_0}^{\infty} A_n
\end{aligned}$$

elde edilir. $m \leq m_0$ için $\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{n=m_0}^{\infty} A_n$ olduğu dikkate alınırsa $x \notin \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$ olduğu görülür. Buradan

$$\forall m \in \mathbb{N} \text{ için } x \notin \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right)$$

elde edilir. Yani $x \notin \liminf A_n$ olduğu görülür.

SORU 9: (A_n) dizisi

$$A_n = \left\{k \in \mathbb{N} : \frac{n\,(n-1)}{2} + 1 \leq k \leq \frac{n\,(n+1)}{2}\right\}$$

olmak üzere (A_n) dizisinin yakınsaklık durumunu araştırınız.

ÇÖZÜM 9: $A_1 = \{1\}\,,\ A_2 = \{2,3\}\,,\ A_3 = \{4,5,6\}\,,$...olup (A_n) dizisi ayrıktır. Bundan dolayı $\lim A_n = \emptyset$ dir.

SORU 10: $a < b - 1$ olmak üzere (A_n) dizisi $A_n = \left[a, b - \frac{1}{n}\right]$ olsun. Bu durumda

$$\textbf{(a)} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{(b)} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

kümelerini bulunuz.

ÇÖZÜM 10: **(a)** $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a, b - \tfrac{1}{n}\right] = [a, b)$

(b) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a, b - \tfrac{1}{n}\right] = [a, b - 1]$