2. ÖLÇÜLER

2.1 Bazı Küme Sınıfları

SORU 1: X bir sonsuz küme ve $\mathcal{A}$ da X kümesinin tüm sonlu alt kümelerinin bir sınıfı olsun. $\mathcal{A}$ sınıfı X üzerinde bir $\sigma-$ cebir midir?

ÇÖZÜM 1:

$$\mathcal{A} := \{B \in P(X) : \ B \text{ sonlu}\}$$

$X \notin \mathcal{A}$ olduğundan $\mathcal{A}$ sınıfı $\sigma-$ cebir değildir.

SORU 2: X sayılamayan bir küme

(a) $\mathcal{A}_1 := \{A \subset X : \ A \text{ sayılabilir}\}$

(b) $\mathcal{A}_2 := \{A \subset X : \ A \text{ sayılabilir veya } X \backslash A \text{ sayılabilir}\}$

sınıfları X üzerinde $\sigma-$ cebir midir?

ÇÖZÜM 2: **(a)** $X \notin \mathcal{A}_1$ olduğundan $\mathcal{A}_1$ sınıfı X üzerinde $\sigma-$ cebir değildir.

(b) (i) $X^t = \emptyset$ sayılabilir olduğundan $X \in \mathcal{A}_2$ dir.

(ii) Keyfi $A \in \mathcal{A}_2$ için $X \backslash A \in \mathcal{A}_2$ olduğunu gösterelim:

$$A \in \mathcal{A}_2 \Longrightarrow \underbrace{A \text{ sayılabilir}}_{\substack{\Downarrow \\ (X\backslash A)^t = A \\ \Downarrow \\ X\backslash A \in \mathcal{A}_2}} \text{ veya } \underbrace{X\backslash A \text{ sayılabilir}}_{\substack{\Downarrow \\ X\backslash A \in \mathcal{A}_2}}$$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{A}_2$ olsun. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_2$ olduğunu gösterelim. Üç durum söz konusudur:

$\lfloor 1 \rfloor$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{A}_2$ sayılabilir olsun. Bu durumda $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ sayılabilirdir. Yani $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_2$ olur.

$\lfloor 2 \rfloor$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n^t \in \mathcal{A}_2$ sayılabilir olsun. Bu durumda $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n^t = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^t$ sayılabilirdir. Dolayısıyla $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_2$.

$\lfloor 3 \rfloor$

$$
\begin{aligned}
B &= \{A_n : \ A_n \text{ sayılabilir}\} \\
C &= \left\{A_n : \ A_n^t \text{ sayılabilir}\right\}
\end{aligned}
$$

olarak tanımlayalım.

$$
\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n}_{\in B}\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n}_{\in C}\right)
$$

olarak yazılabilir.

$$
\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^t = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n}_{\in B}{}^t\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n}_{\in C}{}^t\right) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n}_{\in C}{}^t
$$

gerçeklenir. C sınıfına ait olan A_n kümelerinin A_n^t tümleyenleri sayılabilir olduğundan $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n^t$ sayılabilirdir. Sayılabilir bir kümenin her alt kümeside sayılabilir olacağından $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^t$ sayılabilirdir. Dolayısıyla $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_2$ sağlanır.

Sonuç olarak $\mathcal{A}_2$ sınıfı X üzerinde $\sigma-$ cebirdir.

SORU 3: $\mathcal{A}$, X kümesi üzerinde bir cebir ve (B_n) de $\mathcal{A}$ daki elemanların ayrık dizisi olsun. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$ ise $\mathcal{A}$ sınıfı X üzerinde $\sigma-$ cebirdir. Gösteriniz.

ÇÖZÜM 3: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{A}$ olmak üzere $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} E_0 &: = \emptyset, \quad E_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k \\ B_n &: = A_n \backslash E_{n-1} \end{aligned}$$

kümelerini tanımlayalım. Bu durumda (B_n) dizisi ayrık olup

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

gerçeklenir. Hipotezden $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$ olduğundan $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ dır. Dolayısıyla $\mathcal{A}$ sınıfı X üzerinde $\sigma-$ cebirdir.

SORU 4: X kümesi üzerindeki $\sigma-$ cebirlerin birleşimi de X üzerinde $\sigma-$ cebir midir?

ÇÖZÜM 4:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &: = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{2n : n \in \mathbb{N}\}, \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}\} \\ \mathcal{B} &: = \left\{ \emptyset, \mathbb{N}, \underbrace{\{3n : n \in \mathbb{N}\}}_{=A}, \underbrace{\{3n+1 : n \in \mathbb{N}\}}_{=B}, \underbrace{\{3n+2 : n \in \mathbb{N}\}}_{=C}, A \cup B, A \cup C, B \cup C \right\} \end{aligned}$$

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ sınıfları $\mathbb{N}$ üzerinde $\sigma-$ cebirdir.

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{2n : n \in \mathbb{N}\}, \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}, A, B, C, A \cup B, A \cup C, B \cup C\}$$

olur. $\{2n : n \in \mathbb{N}\} \cup A \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ olduğundan $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ sınıfı $\mathbb{N}$ üzerinde $\sigma-$ cebir değildir.

SORU 5: Her tipten aralık, ışın ve tek nokta kümelerinin Borel cebirinin elemanı olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM 5:

$$\begin{aligned}
(a, b] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b + \tfrac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\
[a, b] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \tfrac{1}{n}, b + \tfrac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\
(b, \infty) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (b, b + n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\
(-\infty, a) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (a - n, a) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\
(-\infty, a] &= \left(-\infty, \tfrac{a}{2}\right) \cup \left[\tfrac{a}{2}, a\right] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\
[b, \infty) &= [b, 2b] \cup (2b, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\
\{a\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \tfrac{1}{n}, a + \tfrac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

SORU 6: $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $\mathcal{B}$ sınıfı da Y üzerinde $\sigma-$cebir olsun.

$$\mathcal{A} := \{A \subset X : \quad f(A) \in \mathcal{B}\}$$

sınıfı X üzerinde $\sigma-$cebir midir?

ÇÖZÜM 6: (i) $X \in \mathcal{A}$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer f fonksiyonu örten ise $f(X) = Y \in \mathcal{B}$ olup $X \in \mathcal{A}$ dır.

(ii) Keyfi $A \in \mathcal{A}$ için $A^t \in \mathcal{A}$ olduğunu göstermeliyiz. f fonksiyonu $1-1$ ve örten ise

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A} &\iff f(A) \in \mathcal{B} \\ &\implies [f(A)]^t \in \mathcal{B} \\ &\implies f(A^t) \in \mathcal{B} \\ &\implies A^t \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{A}$ olsun. $\mathcal{B}$ nin Y üzerinde $\sigma-$cebir olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} A_n \in \mathcal{A} &\iff f(A_n) \in \mathcal{B} \\ &\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n) \in \mathcal{B} \\ &\implies f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \mathcal{B} \\ &\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç olarak f fonksiyonu $1-1$ ve örten ise $\mathcal{A}$ sınıfı X üzerinde $\sigma-$cebirdir.

SORU 7: $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $\mathcal{A}$ sınıfı da X üzerinde $\sigma-$cebir olsun.

$$\mathcal{B} := \left\{B \subset Y : \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$$

sınıfı Y üzerinde $\sigma-$cebir midir?

ÇÖZÜM 7: (i) $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$ olduğundan $Y \in \mathcal{B}$ dir.

(ii) Keyfi $B \in \mathcal{B}$ olsun. $\mathcal{A}$ sınıfının X üzerinde $\sigma-$cebir olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{B} &\iff f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \\ &\implies \left[f^{-1}(B)\right]^t \in \mathcal{A} \\ &\implies f^{-1}(B^t) \in \mathcal{A} \\ &\implies B^t \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $B_n \in \mathcal{B}$ olsun.

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{B} &\iff f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A} \\ &\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A} \\ &\implies f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in \mathcal{A} \\ &\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla $\mathcal{B}$ sınıfı Y üzerinde $\sigma-$cebirdir.

SORU 8: $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{A}$ sınıfı X üzerinde $\sigma-$cebir olsun. $\emptyset \neq B \in \mathcal{A}$ olmak üzere

$$\mathcal{E} := \{A \subset X : \quad A = B \cap C, \quad C \in \mathcal{A}\}$$

sınıfı B kümesi üzerinde $\sigma-$cebir midir?

ÇÖZÜM 8: (i) $B = B \cap X$ veya $B = B \cap B$ olduğundan $X,\ B \in \mathcal{A}$ olması dikkate alınırsa $B \in \mathcal{E}$ elde edilir.

(ii) Keyfi $A \in \mathcal{E}$ için $B \backslash A \in \mathcal{E}$ olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
A \in \mathcal{E} \implies & \quad A = B \cap C, \quad C \in \mathcal{A} \\
\implies & \quad B \backslash A = B \backslash (B \cap C) \\
\implies & \quad B \backslash A = B \cap (B \cap C)^t \\
\implies & \quad B \backslash A = B \cap (B^t \cup C^t) \\
\implies & \quad B \backslash A = (B \cap B^t) \cup (B \cap C^t) \\
\implies & \quad B \backslash A = (B \cap C^t)
\end{aligned}$$

gerçeklenir. $C^t \in \mathcal{A}$ olduğu dikkate alınırsa $B \backslash A \in \mathcal{E}$ elde edilir.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{E}$ olsun.

$$\begin{aligned}
A_n \in \mathcal{E} \implies & \ A_n = B \cap C_n, \quad C_n \in \mathcal{A} \\
\implies & \ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap C_n) \\
\implies & \ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right)
\end{aligned}$$

olur. $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{A}$ olduğu dikkate alınırsa $\mathcal{E}$ sınıfının tanımından $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$ elde edilir.

Dolayısıyla $\mathcal{E}$ sınıfı B kümesi üzerinde $\sigma-$cebirdir.

SORU 9: B herhangi bir küme olmak üzere

$$\mathcal{A} := \{A \subset X : \ A \subset B \subset X\}$$

sınıfı X üzerinde $\sigma-$cebir midir?

ÇÖZÜM 9: (i) $B = X$ alınırsa $\mathcal{A}$ sınıfının tanımından $X \in \mathcal{A}$ dır.

(ii) Keyfi $A \in \mathcal{A}$ kümesini dikkate alalım. $B = X$ alınırsa $A^t \subset X \subset X$ gerçeklenir. O halde $A^t \in \mathcal{A}$ sağlanır.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in \mathcal{A}$ olsun.

$$\begin{aligned} A_n \in \mathcal{A} &\implies A_n \subset B \subset X, \ \ B \subset X \\ &\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset B \subset X \end{aligned}$$

olup $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ sağlanır.

O halde $\mathcal{A}$ sınıfı X üzerinde $\sigma-$cebirdir.

SORU 10: A sabitlenmiş bir küme olmak üzere

$$\mathcal{A} := \left\{B \subset X : \ A \subset B \subset X \text{ veya } A \subset B^t \subset X\right\}$$

sınıfı X üzerinde $\sigma-$cebir midir?

ÇÖZÜM 10: (i) $X \in \mathcal{A}$ olduğu tanımdan açıktır.

(ii) Keyfi $B \in \mathcal{A}$ olsun. Bu durumda $A \subset B \subset X$ veya $A \subset B^t \subset X$ olacağından $B^t \in \mathcal{A}$ gerçeklenir.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $B_n \in \mathcal{A}$ olsun. Buradan $A \subset B_n \subset X$ veya $A \subset B_n^t \subset X$ olacağından $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset X$ veya $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^t \subset X$ sağlanır. Yani, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$ dır.

Dolayısıyla $\mathcal{A}$ sınıfı X kümesi üzerinde $\sigma-$cebirdir.