Periyodik Çözümler

$F(x, y)$ ve $G(x, y)$ fonksiyonları faz düzleminde sürekli ve birinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \tag{1}$$

otonom sistemini gözönüne alalım. Şimdiye kadar yapılan incelemeler, belli kritik nokta türlerinin komşuluğundaki bilgi dışında (1) sisteminin yolları hakkında çok fazla bilgi içermemektedir. Bununla beraber bir çok problemde yolların yerel özellikleri yerine global özellikleri ile ilgilenilmektedir.

Global teorinin temel problemi, (1) sisteminin kapalı yollara sahip olup olmadığının saptanmasıdır. Bu problem (1) sisteminin periyodik çözümlere sahip olması ile yakın ilgisi bulunması bakımından çok önemlidir.

Tanım 1. (1) sisteminin $(x(t), y(t))$ çözümü aşağıdaki şartları sağlarsa, bu çözüme periyodiktir denir:

(a) Her iki fonksiyon her t için tanımlıdır,

(b) Her iki fonksiyon sabit değildir,

(c) Her t için $x(t + T) = x(t)$ ve $y(t + T) = y(t)$ olacak şekilde bir $T > 0$ sayısı vardır.

Uyarı 1. Açık olarak (1) sisteminin her bir periyodik çözümü, herhangi bir t_0 için t, t_0 dan $t_0 + T$ ye artarken bir kez çizilen bir kapalı yol tanımlar. Tersine olarak, $C : [x(t), y(t)]$ (1) in bir kapalı yolu ise, bu durumda $(x(t), y(t))$ nin bir periyodik çözüm olduğu anlaşılır. Buna göre (1) sisteminin periyodik çözümlerinin araştırılması, kapalı yolların araştırılmasına indirgeniyor demektir.

Uyarı 2. Önceki bölümlerden biliniyor ki iki boyutlu sabit katsayılı bir lineer homogen sistemin kapalı yollara sahip olması, karakteristik denklemin köklerinin sırf sanal olması ile eşdeğerdir ve bu durumda her yol kapalıdır. Böylece bir lineer sistem için ya her yol kapalıdır ya da hiç bir yol kapalı değildir. Diğer yandan lineer olmayan bir sistemde bu durum geçerli olmayabilir.

Teorem 1. (1) sisteminin bir kapalı yolu zorunlu olarak bu sistemin en az bir kritik noktasını kapsar.

Bu sonuç negatif bir kriter vermesi bakımından önemlidir. Verilen bir bölgede kritik noktaları bulunmayan bir sistem, o bölgede kapalı yola sahip olamaz.

Aşağıdaki teorem de başka bir negatif kriter verir.

Teorem 2. $\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y}$, faz düzleminin belli bir Ω bölgesinde daima pozitif ya da daima negatif ise, bu durumda (1) sistemi o bölgede kapalı bir yola sahip olamaz.

Teorem 3. R faz düzleminde sınırlı bir bölge olsun ve R nin (1) sisteminin herhangi bir kritik noktasını kapsamadığını varsayalım. $C : [x(t), y(t)]$, (1) sisteminin herhangi bir t_0 için R de bulunan ve her $t \geq t_0$ için R nin içinde kalan bir yolu ise, bu durumda C kapalı bir yoldur veya $t \to \infty$ için bir kapalı yola doğru sarmal biçimde döner. Böylece her iki durumda da (1) sistemi R de bir kapalı yola sahiptir.

Şimdi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \tag{2}$$

Lienard denklemini ele alalım. (2) denklemi

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y \end{cases} \tag{3}$$

sistemine eşdeğerdir ve bilinmektedr ki (3) sisteminin bir kapalı yolu (2) denkleminin bir periyodik çözümüne karşılık gelir.

Teorem 4. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlasın:

(i) Her x için her iki fonksiyon sürekli ve sürekli türevlere sahiptir.

(ii) $x > 0$ için $g(x) > 0$ olacak şekilde $g(x)$ tek ve $f(x)$ çift fonksiyondur.

(iii) $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(s)ds$ tek fonksiyonu, $x = a$ da bir pozitif sıfıra sahiptir, $0 < x < a$ için negatif $x > a$ için pozitif ve azalmayandır, $x \to \infty$ için $F(x) \to \infty$.

Bu durumda (2) denklemi faz düzleminde orijini çevreleyen bir tek kapalı yola sahiptir ve $t \to \infty$ için diğer her yol ile bu yola sarmal biçimde yaklaşılır.

Örnek 1. μ bir pozitif sabit olmak üzere

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{4}$$

Van der Pol denklemini ele alalım. Açık olarak (4) denklemi

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - \mu(x^2 - 1)y \end{cases} \tag{5}$$

sistemine eşdeğerdir. Kolaylıkla görülebilir ki $f(x) = \mu(x^2 - 1)$ ve $g(x) = x$ fonksiyonları Teorem 4 ün hipotezlerini gerçekler. O halde (4) denklemi faz düzleminde orijini çevreleyen bir tek kapalı yola sahiptir ve $t \to \infty$ için diğer her yol ile bu yola sarmal biçimde yaklaşılır.