2.2 Ölçüler

SORU 1: En az iki elemana sahip bir X kümesi ile bunun $P(X)$ kuvvet kümesi veriliyor. $P(X)$ üzerinde

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & ; \quad A = \emptyset \\ 1 & ; \quad A \neq \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan μ dönüşümü ölçü müdür?

ÇÖZÜM 1: (i) Tanımdan $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) $\forall A \in P(X)$ için $\mu(A) \geq 0$ dır.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için (A_n), $P(X)$ deki ayrık kümelerin bir dizisi olsun. Üç durum söz konusudur:

$\lfloor 1 \rfloor$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \emptyset$ ise $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ gerçeklenir.

$\lfloor 2 \rfloor$ $n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall n \leq n_0$ için $A_n = \emptyset$, $\forall m, n \geq n_0$ için $A_n, A_m \neq \emptyset$ ve $A_n \cap A_m = \emptyset$ olsun.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$$

olup $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$ dir. Diğer yandan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \mu(A_n) = 1 + 1 + ... = +\infty$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$$

olduğu görülür. Üçüncü duruma bakmaya gerek yoktur. Dolayısıyla μ fonksiyonu $P\left(X\right)$ üzerinde bir ölçü değildir.

SORU 2: $\mathcal{A}$ sınıfı X üzerinde $\sigma-$cebir, μ dönüşümü $\mathcal{A}$ $\sigma-$cebiri üzerinde ölçü ve $A \in \mathcal{A}$ sabitlenmiş bir küme olsun. $E \in \mathcal{A}$ için

$$\nu\left(E\right) := \mu\left(E \backslash A\right)$$

olarak tanımlanan ν dönüşümü $\mathcal{A}$ üzerinde ölçü müdür?

ÇÖZÜM 2: (i) $\nu\left(\emptyset\right) := \mu\left(\emptyset \backslash A\right) = \mu\left(\emptyset\right) = 0.$

(ii) μ, $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçü olduğundan $\nu\left(E\right) = \mu\left(E \backslash A\right) \geq 0$ gerçeklenir.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için (E_n), $\mathcal{A}$ daki ayrık kümelerin bir dizisi olsun. Bu durumda $m \neq n$ olmak üzere

$$\left(E_n \backslash A\right) \cap \left(E_m \backslash A\right) = \emptyset$$

olup $\left(E_n \backslash A\right)$ dizisi $\mathcal{A}$ daki ayrık kümelerin bir dizisidir. Dolayısıyla μ dönüşümü

$\mathcal{A}$ üzerinde ölçü olduğundan

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\backslash A\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n\backslash A)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(E_n\backslash A\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu\left(E_n\right)
\end{aligned}$$

sağlanır.

Sonuç olarak ν dönüşümü $\mathcal{A}$ $\sigma-$cebiri üzerinde ölçüdür.

SORU 3: $\mu_1, ..., \mu_n$; $\mathcal{A}$ $\sigma-$cebiri üzerinde ölçü ve $a_1, ..., a_n$ negatif olmayan reel sayı ise $\mathcal{A}$ üzerinde

$$\nu\left(E\right) := \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k\left(E\right)$$

ile tanımlı ν dönüşümü ölçü müdür?

ÇÖZÜM 3: (i) $\nu\left(\emptyset\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k\left(\emptyset\right) = 0.$

(ii) $\mu_1, ..., \mu_n$ ölçü olduğundan $\forall E \in \mathcal{A}$ için $\nu\left(E\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k\left(E\right) \geq 0.$

(iii) $\left(E_m\right)$, $\mathcal{A}$ daki ayrık kümelerin bir dizisi olsun. $1 \leq k \leq n$ için μ_k dönüşümleri ölçü olduğundan

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) &= \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k \left[\sum_{m=1}^{\infty} \mu_k\left(E_m\right)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{\infty} a_k \mu_k\left(E_m\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k\left(E_m\right)\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \nu\left(E_m\right)
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

Dolayısıyla ν dönüşümü $\mathcal{A}$ $\sigma-$cebiri üzerinde ölçüdür.

SORU 4: $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve (μ_n) ölçü dizisi için $\mu_n(X) = \frac{1}{2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı

$$\beta(E) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n(E)$$

dönüşümü ölçü müdür? Ayrıca $\beta(X) = ?$

ÇÖZÜM 4: (i) $\beta(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n(\emptyset) = 0.$

(ii) Keyfi $E \in \mathcal{A}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\mu_n(E) \geq 0$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n(E) \geq 0$ gerçeklenir.

(iii) (E_m) $\mathcal{A}$ daki ayrık kümelerin dizisi olsun. (μ_n) ölçü dizisi olduğundan

$$\begin{aligned}
\beta\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mu_n(E_m)\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n(E_m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \beta(E_m)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\mu_n(E_m) \leq \mu_n(X) = \frac{1}{2}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ serisi yakınsak olduğundan serilerin yerleri değiştirilebilmiştir. O halde β dönüşümü $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçü tanımlar. Diğer yandan

$$\beta(X) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n(X) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$$

elde edilir.

SORU 5: $\mathcal{A}$ sınıfı X üzerinde $\sigma-$cebir, μ dönüşümü $\mathcal{A}$ üzerinde ölçü olsun. $B \neq \emptyset$ ve $B \in \mathcal{A}$ olmak üzere

$$\mathcal{K} := \{A \subset X : \; A = B \cap C, \quad C \in \mathcal{A}\}$$

olsun.

$$\nu(A) := \mu(A \cap B)$$

şeklinde tanımlı ν dönüşümü $\mathcal{K}$ üzerinde ölçü müdür?

ÇÖZÜM 5: *2.1 Bazı Küme Sınıfları kesimindeki Soru 8 den* $\mathcal{K}$ sınıfı X üzerinde $\sigma-$cebirdir.

(i) $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap B) = 0$ dır.

(ii) Keyfi $A \in \mathcal{K}$ için $\nu(A) = \mu(A \cap B) \geq 0$ sağlanır.

(iii) (A_n) dizisi $\mathcal{K}$ daki ayrık kümelerin dizisi olsun. $(A_n \cap B)$ dizisini dikkate alalım. $m \neq n$ olmak üzere

$$(A_n \cap B) \cap (A_m \cap B) = \emptyset$$

olduğu göz önüne alınırsa $(A_n \cap B)$ $\mathcal{A}$ daki ayrık kümelerin bir dizisidir. Ayrıca μ dönüşümü $\mathcal{A}$ üzerinde ölçü olduğundan

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde ν dönüşümü $\mathcal{K}$ üzerinde ölçüdür.

SORU 6: (a_n) negatif olmayan sayıların dizisi olsun. $P(\mathbb{N})$ üzerinde tanımlı

$$\mu(E) := \begin{cases} 0 & ; \quad E = \emptyset \\ \displaystyle\sum_{n \in E} a_n & ; \quad E \neq \emptyset \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan μ dönüşümü $P(\mathbb{N})$ üzerinde ölçü müdür? $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ ise $\mu(\mathbb{N}) = ?$

ÇÖZÜM 6: (i) $\mu(\emptyset) = 0$ dır.

(ii) Keyfi $E \in P(\mathbb{N})$ alalım. $E = \emptyset$ ise $\mu(E) = 0$, $E \neq \emptyset$ ise $\mu(E) = \sum\limits_{n \in E} a_n \geq 0$ dır.

(iii) (E_n), $P(\mathbb{N})$ deki ayrık kümelerin dizisi olsun. Üç durum söz konusudur:

$\lfloor 1 \rfloor$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n = \emptyset$ olsun. Bu durumda $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$ olup $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu(\emptyset) = 0$ dır. Diğer yandan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mu(E_n) = 0$ olduğundan

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

gerçeklenir.

$\lfloor 2 \rfloor$ $n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall m, n \leq n_0$ için E_n, $E_m \neq \emptyset$, $E_n \cap E_m = \emptyset \, (m \neq n)$ ve

$\forall n \geq n_0$ için $E_n = \emptyset$ olsun. Bu durumda $E_1, ..., E_{n_0}$ kümeleri ayrık olduğundan

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n_0} E_k\right) \\
&= \sum_{n \in \bigcup\limits_{k=1}^{n_0} E_k} a_n \\
&= \sum_{n \in \left(E_1 \cup ... \cup E_{n_0}\right)} a_n \\
&= \sum_{n \in E_1} a_n + ... + \sum_{n \in E_{n_0}} a_n \\
&= \mu\left(E_1\right) + ... + \mu\left(E_{n_0}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n_0} \mu\left(E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(E_k\right)
\end{aligned}$$

istenilen elde edilir.

$\lfloor 3 \rfloor$ $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $E_n \cap E_m = \emptyset \, (m \neq n)$ ve $E_n \neq \emptyset$ olsun. E_n kümeleri ayrık olduğundan

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \sum_{n \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k} a_n \\
&= \sum_{n \in (E_1 \cup ... \cup E_n \cup ...)} a_n \\
&= \sum_{n \in E_1} a_n + ... + \sum_{n \in E_n} a_n + ... \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(E_k\right)
\end{aligned}$$

olur.

Dolayısıyla μ dönüşümü $P(\mathbb{N})$ üzerinde ölçüdür.

$$\mu(\mathbb{N}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = 1$$

bulunur.

SORU 7: X bir küme, $\mathcal{A}$ sınıfıda X üzerinde $\sigma-$cebir olsun. $E_1,\ E_2 \in \mathcal{A}$ ve μ dönüşümü $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçü olmak üzere

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1 \cap E_2)$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM 7: $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ise $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$ olup μ ölçü olduğundan

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$$

gerçeklenir.

$E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ olsun. $E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 \backslash E_1)$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \mu(E_1 \cup E_2) &= \mu(E_1 \cup (E_2 \backslash E_1)) \\ &= \mu(E_1) + \mu(E_2 \backslash E_1) \qquad (1) \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca $E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_2 \backslash E_1)$ olarak yazılabileceğinden

$$\mu(E_2) = \mu(E_1 \cap E_2) + \mu(E_2 \backslash E_1) \qquad (2)$$

gerçeklenir. $\mu(E_1 \cap E_2) < \infty$ ise (2) ifadesi (1) ifadesinde dikkate alındığında

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1 \cap E_2)$$

elde edilir.

SORU 8: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

$$\mathcal{B} := \{E \in \mathcal{A} : \quad \mu(E) = 0\}$$

sınıfı X üzerinde $\sigma-$cebir midir?

(a) $E \in \mathcal{B}$, $F \in \mathcal{A}$ ise $E \cap F \in \mathcal{B}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathcal{B}$ ise $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM 8: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ olmak üzere doğal sayıların kuvvet kümesi üzerinde

$$\widetilde{\mu}(E) := \begin{cases} n(E) & ; \quad E \text{ sonlu ise} \\ +\infty & ; \quad E \text{ sonlu değil ise} \end{cases}$$

dönüşümü tanımlansın. Burada $n(E)$ ifadesi E kümesinin eleman sayısıdır. $\widetilde{\mu}$ dönüşümü $P(\mathbb{N})$ üzerinde ölçüdür. O halde $\left(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \widetilde{\mu}\right)$ ölçü uzayıdır. Şimdi $\mathcal{B}$ sınıfını $\widetilde{\mu}$ ölçüsü için tanımlayalım:

$$\mathcal{B} := \left\{E \in P(\mathbb{N}) : \quad \widetilde{\mu}(E) = 0\right\}$$

$\widetilde{\mu}(\mathbb{N}) = +\infty \neq 0$ olduğundan $\mathbb{N} \notin \mathcal{B}$ dir. Dolayısıyla $\mathcal{B}$ sınıfı $\sigma-$cebir olmak zorunda değildir.

(a) $E \in \mathcal{B}$ ise $E \in \mathcal{A}$ dir. $\mathcal{A}$ sınıfı $\sigma-$cebir olduğundan $E \cap F \in \mathcal{A}$ olmalıdır. $E \cap F \subset E$ gerçeğinden $0 \leq \mu(E \cap F) \leq \mu(E) = 0$ sağlanıp $\mu(E \cap F) = 0$ olur. Yani $E \cap F \in \mathcal{B}$ bulunur.

(b)

$$\begin{aligned} F_1 &= E_1 \\ F_n &= E_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \right), \quad n > 1 \end{aligned}$$

olmak üzere (F_n) dizisini göz önüne alalım. Bu durumda (F_n), $\mathcal{A}$ daki ayrık kümelerin dizisi olup

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

gerçeklenir. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$ olduğu açıktır. μ ölçü olduğundan

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \tag{3}$$

yazılabilir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $F_n \subset E_n$ olduğundan $\mu(F_n) \leq \mu(E_n)$ gerçeklenir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathcal{B}$ olmasından $E_n \in \mathcal{A}$ ve $\mu(E_n) = 0$ sağlanır. Buradan da $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mu(F_n) = 0$ elde edilir. (3) ifadesi dikkate alınırsa $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$ olup $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{B}$ istenileni bulunur.