2.3 Dış Ölçüler

SORU 1: $P(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlı

$$\mu_1^*(A) := \begin{cases} 0 & ; \quad A = \emptyset \\ +\infty & ; \quad A \neq \emptyset \end{cases}$$

dönüşümü dış ölçü müdür?

ÇÖZÜM 1: (i) $\mu_1^*(\emptyset) = 0$ olduğu tanımdan açıktır.

(ii) $\forall A \in P(\mathbb{R})$ için $\mu_1^*(A) \geq 0$ olduğu tanımdan görülmektedir.

(iii) $A,\ B \in P(\mathbb{R})$ ve $A \subset B$ olduğunda $\mu_1^*(A) \leq \mu_1^*(B)$ olduğunu göstermeliyiz. İki durum söz konusudur:

$\lfloor 1 \rfloor$ $A = \emptyset$ ise $B \neq \emptyset$ ya da $B = \emptyset$ dir. O halde $\mu_1^*(A) = 0$, $\mu_1^*(B) = +\infty$ ya da $\mu_1^*(B) = 0$ dır. Dolayısıyla $\mu_1^*(A) \leq \mu_1^*(B)$ gerçeklenir.

$\lfloor 2 \rfloor$ $A \neq \emptyset$ ise $B \neq \emptyset$ olmak zorundadır. O halde $\mu_1^*(A) = +\infty$ ve $\mu_1^*(B) = +\infty$ olup $\mu_1^*(A) \leq \mu_1^*(B)$ sağlanır.

(iv) (A_n), $P(\mathbb{R})$ deki kümelerin herhangi bir dizisi için $\mu_1^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_1^*(A_n)$ sağlandığı gösterilmelidir. Üç durum söz konusudur:

$\lfloor 1 \rfloor$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \emptyset$ olsun. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ olup $\mu_1^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ olur. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_1^*(A_n) = 0 + 0 + ... = 0$ olduğu da göz önüne alınırsa $\mu_1^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) =$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_1^*(A_n)$ sağlanır.

$\lfloor 2 \rfloor$ $n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \leq n_0$ için $A_n \neq \emptyset$ ve $\forall n > n_0$ için $A_n = \emptyset$ olsun. Bu durumda

$$\mu_1^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu_1^*\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n\right) = +\infty$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_1^*(A_n) = \sum_{n=1}^{n_0} \mu_1^*(A_n) = +\infty$$

gerçeklenip istenilen eşitsizlik sağlanır.

$\lfloor 3 \rfloor$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \neq \emptyset$ olsun.

$$\mu_1^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = +\infty \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1^*(A_n) = +\infty$$

olduğundan yine istenilen eşitsizlik elde edilir.

Dolayısıyla μ_1^*, $P(\mathbb{R})$ üzerinde dış ölçüdür.

SORU 2: $P(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlı

$$\mu_2^*(A) := \begin{cases} 0 & ; \quad A = \emptyset \\ 1 & ; \quad A \neq \emptyset \text{ ve sınırlı} \\ +\infty & ; \quad A \neq \emptyset \text{ ve sınırsız} \end{cases}$$

dönüşümü dış ölçü müdür?

ÇÖZÜM 2: (i) $\mu_2^*(\emptyset) = 0$ dır.

(ii) $\forall A \in P(\mathbb{R})$ için $\mu_2^*(A)$ ifadesi 0, 1 veya $+\infty$ değerlerinden birini alıp $\mu_2^*(A) \geq 0$ gerçeklenir.

(iii) $A, B \in P(\mathbb{R})$ olmak üzere $A \subset B$ olsun.

$$\begin{array}{lcccc}
A = \emptyset & \text{için} & B = \emptyset & \Longrightarrow & \mu_2^*(A) = \mu_2^*(B) = 0 \\
A = \emptyset & \text{için} & (B \neq \emptyset \text{ ve } B \text{ sınırlı }) & \Longrightarrow & \mu_2^*(A) = 0 \leq \mu_2^*(B) = 1 \\
A = \emptyset & \text{için} & (B \neq \emptyset \text{ ve } B \text{ sınırsız}) & \Longrightarrow & \mu_2^*(A) = 0 \leq \mu_2^*(B) = +\infty \\
(A \neq \emptyset \text{ ve } A \text{ sınırlı }) & \text{için} & (B \neq \emptyset \text{ ve } B \text{ sınırlı }) & \Longrightarrow & \mu_2^*(A) = 1 = \mu_2^*(B) \\
(A \neq \emptyset \text{ ve } A \text{ sınırlı }) & \text{için} & (B \neq \emptyset \text{ ve } B \text{ sınırsız}) & \Longrightarrow & \mu_2^*(A) = 1 \leq \mu_2^*(B) = +\infty \\
(A \neq \emptyset \text{ ve } A \text{ sınırsız}) & \text{için} & (B \neq \emptyset \text{ ve } B \text{ sınırsız}) & \Longrightarrow & \mu_2^*(A) = +\infty = \mu_2^*(B)
\end{array}$$

olup bütün durumlarda $\mu_2^*(A) \leq \mu_2^*(B)$ gerçeklenir.

(iv) (A_n), $P(\mathbb{R})$ deki kümelerin herhangi bir dizisi için $\mu_2^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2^*(A_n)$ sağlandığı gösterilmelidir. Yedi durum söz konusudur:

$\lfloor 1 \rfloor$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \emptyset$ olsun. $\mu_2^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2^*(A_n) = 0$ dır.

$\lfloor 2 \rfloor$ $n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \leq n_0$ için $A_n \neq \emptyset$ ve A_n sınırlı, $\forall n > n_0$ için $A_n = \emptyset$ olsun. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{n_0} A_n \neq \emptyset$ ve bu küme sınırlı olduğundan $\mu_2^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$ dir. Ayrıca $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_2^*(A_n) = \sum_{n=1}^{n_0} \mu_2^*(A_n) = n_0$ dır. Dolayısıyla $\mu_2^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2^*(A_n)$ eşitsizliği gerçeklenir.

$\lfloor 3 \rfloor$ $n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \leq n_0$ için $A_n \neq \emptyset$ ve A_n sınırsız, $\forall n > n_0$ için $A_n = \emptyset$

olsun. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{n_0} A_n \neq \emptyset$ ve bu küme sınırsız olduğundan $\mu_2^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = +\infty$ dur. Ayrıca $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_2^*(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{n_0} \mu_2^*(A_n) = +\infty$ dır. Dolayısıyla istenilen eşitsizlik sağlanır.

$\lfloor 4 \rfloor$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \neq \emptyset$ ve A_n sınırlı olsun. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ olup bu küme sınırlı da olabilir sınırsız da olabilir. Bu durumları incelersek

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset \ \text{ ve sınırlı } &\implies \mu_2^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset \ \text{ ve sınırsız } &\implies \mu_2^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = +\infty \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_2^*(A_n) = +\infty$ olduğu dikkate alınırsa istenilen eşitsizlik yine sağlanır.

$\lfloor 5 \rfloor$ $n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \leq n_0$ için $A_n \neq \emptyset$ ve A_n sınırlı, $\forall n > n_0$ için $A_n \neq \emptyset$ ve A_n sınırsız olsun. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ ve sınırsız olup $\mu_2^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = +\infty$ dur. Ayrıca $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_2^*(A_n) = +\infty$ olduğu dikkate alınırsa istenilen eşitsizlik tekrar sağlanır.

$\lfloor 6 \rfloor$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \neq \emptyset$ ve A_n sınırsız olsun. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ ve sınırsız olup $\mu_2^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = +\infty$ dur. Ayrıca $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_2^*(A_n) = +\infty$ olup istenilen elde edilir.

$\lfloor 7 \rfloor$ n_0, $m_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \leq n_0$ için $A_n = \emptyset$, $n_0 < n < m_0$ için $A_n \neq \emptyset$ ve A_n sınırlı, $\forall n \geq m_0$ için $A_n \neq \emptyset$ ve A_n sınırsız olsun. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ ve sınırsız olacaktır. O halde istenilen eşitsizlik tekrardan sağlanır.