2.4 Lebesgue Dış Ölçüsü ve Lebesgue Ölçüsü

SORU 1: Herbir $A \subset \mathbb{R}$ kümesi için $A \subset G$ ve $\lambda^*(A) = \lambda^*(G)$ olacak şekilde $G \subset \mathbb{R}$ kümesinin varlığını gösteriniz?

ÇÖZÜM 1: B sayılabilir bir küme olsun. Bu durumda $\lambda^*(B) = 0$ gerçeklenir. $G = A \cup B$ olarak tanımlayalım. $A \subset A \cup B$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\lambda^*(A) &\leq \lambda^*(A \cup B) \\ &\leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B) = \lambda^*(A)\end{aligned}$$

olur. Bu ifade aşağıda kullanırsa

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(A \cup B) \leq \lambda^*(A)$$

elde edilir. O halde $\lambda^*(A) = \lambda^*(G)$ sağlanır.

SORU 2: $B \subset \mathbb{R}$ alt kümesinin Lebesgue ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul $\forall I \subset \mathbb{R}$ açık aralığı için

$$\lambda^*(I) = \lambda^*(I \cap B) + \lambda^*\left(I \cap B^t\right)$$

olmasıdır. Gösteriniz.

ÇÖZÜM 2:($\Longrightarrow$) $B \subset \mathbb{R}$ Lebesgue ölçülebilir olsun. $A \subset \mathbb{R}$ herhangi bir kümesini dikkate alalım.

$$A = (A \cap B) \cup \left(A \cap B^t\right)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda

$$\lambda^* (A) = \lambda^* (A \cap B) + \lambda^* \left(A \cap B^t\right)$$

gerçeklenir. Özel olarak $A = I$ alınırsa istenilen elde edilir.

($\Longleftarrow$) Kabul edelim ki $\forall I \subset \mathbb{R}$ aralığı için

$$\lambda^* (I) = \lambda^* (I \cap B) + \lambda^* \left(I \cap B^t\right)$$

olsun. Hatırlatmak gerekirse "$B \subset \mathbb{R}$ Lebesgue ölçülebilir$\Longleftrightarrow$ $\forall E \subset \mathbb{R}$ için $\lambda^* (E) \geq \lambda^* (E \cap B) + \lambda^* (E \cap B^t)$".

$\lambda^* (E) = \infty$ için eşitsizlik geçerlidir. $\lambda^* (E) < \infty$ olduğunu kabul edelim.

λ^* Lebesgue dış ölçüsünün tanımından ve infimum özelliğinden $\forall \epsilon > 0$ için $\exists (I_n) = ((a_n, b_n)) \in \tau_E$ vardır öyle ki

$$\sum_{n=1}^{\infty} l (I_n) < \lambda^* (E) + \epsilon \tag{1}$$

gerçeklenir. $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ olduğundan

$$\begin{aligned} E \cap B &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [(a_n, b_n) \cap B] \\ E \cap B^t &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[(a_n, b_n) \cap B^t\right] \end{aligned}$$

yazılabilir. λ^* Lebesgue dış ölçüsünün özelliğinden

$$\begin{aligned} \lambda^* (E \cap B) &\leq \lambda^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [(a_n, b_n) \cap B]\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^* ((a_n, b_n) \cap B) \\ \lambda^* \left(E \cap B^t\right) &\leq \lambda^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[(a_n, b_n) \cap B^t\right]\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^* \left((a_n, b_n) \cap B^t\right) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Hipotez ve (1) ifadesi kullanılırsa $\forall\epsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\lambda^*(E\cap B)+\lambda^*\left(E\cap B^t\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*\left((a_n,b_n)\cap B\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*\left((a_n,b_n)\cap B^t\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*\left((a_n,b_n)\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} l\left((a_n,b_n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty} l\left(I_n\right)<\lambda^*(E)+\epsilon
\end{aligned}$$

yazılabilir. Sol taraf $\epsilon-$ dan bağımsız olduğundan istenilen

$$\lambda^*(E)\geq\lambda^*(E\cap B)+\lambda^*\left(E\cap B^t\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

SORU 3: X bir küme; μ^* dönüşümü $P(X)$ üzerinde dış ölçü olsun. A, $B\in P(X)$ ve $\mu^*(B)=0$ olduğunda

(a) $\mu^*(A\cap B)=0.$

(b) $\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)\,.$

(c) B kümesi μ^* ölçülebilirdir.

Gösteriniz.

ÇÖZÜM 3: **(a)** $A\cap B\subset B$ olduğundan $\mu^*(A\cap B)\leq\mu^*(B)=0$ sağlanıp $\mu^*(A\cap B)=0$ bulunur.

(b) $A\subset A\cup B$ olduğundan $\mu^*(A)\leq\mu^*(A\cup B)\leq\mu^*(A)+\mu^*(B)=\mu^*(A)$ olup bu eşitsizlikten $\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)$ elde edilir.

(c) $\forall F \subset X$ için $\mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap B) + \mu^*(F \cap B^t)$ eşitsizliğinin gerçeklendiğini göstermek yeterlidir. $F \cap B^t \subset F$ olduğu kullanılırsa

$$\mu^*\left(F \cap B^t\right) \leq \mu^*(F)$$

olur. $\mu^*(F \cap B) = 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$\mu^*(F \cap B) + \mu^*\left(F \cap B^t\right) \leq \mu^*(F)$$

elde edilir. Dolayısıyla B kümesi μ^* ölçülebilirdir.

SORU 4: λ^* Lebesgue dış ölçüsü olmak üzere $A \subset \mathbb{R}$ kümesi λ^* ölçülebilir olsun.

(a) $\lambda^*(A + x) = \lambda^*(A) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

(b) $A + x := \{a + x : \quad a \in A\}$ kümesi λ^* ölçülebilirdir.

Gösteriniz.

ÇÖZÜM 4: **(a)** $\tau_A := \left\{(I_k) = ((a_k, b_k)) : \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)\right\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda^*(A) &= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : \quad (I_k) \in \tau_A\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) : \quad (I_k) \in \tau_A\right\} \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. $\tau_{A+x} := \left\{(I_k + x) = ((a_k + x, b_k + x)) : \quad A + x \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k + x, b_k + x)\right\}$

olup

$$
\begin{aligned}
\lambda^*(A+x) &= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l\left((a_k+x, b_k+x)\right): \quad ((a_k+x, b_k+x)) \in \tau_{A+x}\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (b_k-a_k): \quad ((a_k, b_k)) \in \tau_A\right\} \\
&= \lambda^*(A)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(b) $A+x$ kümesinin λ^* ölçülebilir olması için $\forall E \subset \mathbb{R}$ için

$$
\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap (A+x)) + \lambda^*\left(E \cap (A+x)^t\right)
$$

olduğu gösterilmelidir. Hatırlatmak gerekirse

$$
\begin{aligned}
E \cap (A+x) &= [(E-x) \cap A] + x \\
E \cap (A+x)^t &= \left[(E-x) \cap A^t\right] + x
\end{aligned}
$$

eşitlikleri gerçeklenir. Gerçekten bu eşitliklerden birincisini elde edelim:

$$
\begin{aligned}
y \in [E \cap (A+x)] &\iff y \in E \ \wedge \ y \in A+x \\
&\iff y \in E \ \wedge \ y-x \in A \\
&\iff y-x \in E-x \ \wedge \ y-x \in A \\
&\iff y-x \in (E-x) \cap A \\
&\iff y \in [(E-x) \cap A] + x
\end{aligned}
$$

bulunur. **(a)** şıkkındaki ifade kullanılırsa

$$\begin{aligned}\lambda^*\left(E \cap (A+x)\right) &= \lambda^*\left(\left[(E-x) \cap A\right] + x\right) \\ &= \lambda^*\left((E-x) \cap A\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\lambda^*\left(E \cap (A+x)^t\right) &= \lambda^*\left(\left[(E-x) \cap A^t\right] + x\right) \\ &= \lambda^*\left((E-x) \cap A^t\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan A kümesinin Lebesgue ölçülebilir olması kullanılarak

$$\begin{aligned}\lambda^*\left(E \cap (A+x)\right) + \lambda^*\left(E \cap (A+x)^t\right) &= \lambda^*\left((E-x) \cap A\right) + \lambda^*\left((E-x) \cap A^t\right) \\ &= \lambda^*\left(E-x\right) \\ &= \lambda^*\left(E\right)\end{aligned}$$

gerçeklenir. Yani sonuç olarak $A+x$ kümesi λ^* ölçülebilirdir.

SORU 5: $\alpha > 0$ olmak üzere $A \subset \mathbb{R}$ için

$$\alpha A := \{\alpha a : \quad a \in A\}$$

olsun. Bu durumda

$$\lambda^*\left(\alpha A\right) = \alpha \lambda^*\left(A\right)$$

olduğunu gösteriniz.

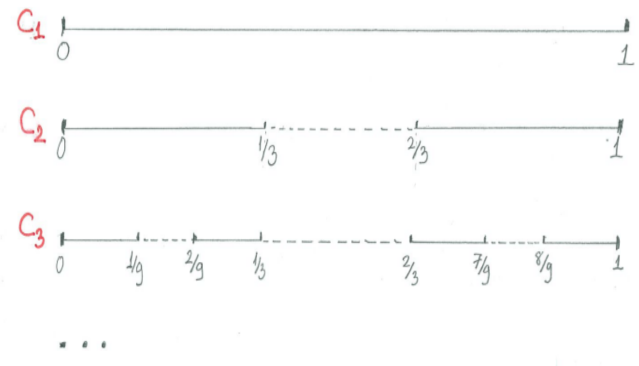
ÇÖZÜM 5: $(I_n) = \left(\frac{1}{\alpha} J_n\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\lambda^*(\alpha A) &= \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(J_n) : \qquad (J_n) \in \tau_{\alpha A} \right\} \\
&= \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(J_n) : \qquad \alpha A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n, \quad (J_n) = ((c_n, d_n)) \right\} \\
&= \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(J_n) : \qquad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} J_n, \quad (J_n) = ((c_n, d_n)) \right\} \\
&= \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(\alpha I_n) : \qquad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad (I_n) = \left(\frac{1}{\alpha} J_n\right) \right\} \\
&= \alpha \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) : \qquad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad (I_n) \in \tau_A \right\} \\
&= \alpha \lambda^*(A)
\end{aligned}$$

elde edilir.

SORU 6: Cantor kümesinin Lebesgue ölçülebilir olduğunu gösteriniz. Lebesgue ölçüsünün sıfır olacağını bulunuz. Sayılamayan fakat ölçüsü sıfır olan kümeler var mıdır?

ÇÖZÜM 6:



Şekil 1. Cantor K$\ddot{u}$mesi

Cantor kümesi $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ dir. Herbir C_i Lebesgue ölçülebilir olduğundan C Cantor kümesi de Lebesgue ölçülebilirdir.

$$\begin{array}{rcl} \lambda^*(C_1) & = & 1 \\ \lambda^*(C_2) & = & 1 - \frac{1}{3} \\ \lambda^*(C_3) & = & 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} \\ \lambda^*(C_4) & = & 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

olup

$$\lambda^*(C) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - 1 = 0$$

bulunur. Ayrıca belirtmek gerekirse C Cantor kümesi sayılamayan küme olup $\lambda^*(C) = 0$ dır.

SORU 7: Aşağıdaki kümelerin Lebesgue ölçülerini bulunuz.

(a) $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : \ \ \frac{1}{k+1} \leq x < \frac{1}{k} \right\}$

(b) $B := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : \ \ \frac{a-1}{k} < x < \frac{a+1}{k} \right\}$

(c) $C := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : \ \ \frac{1}{2^{k+1}} \leq x < \frac{1}{2^k} \right\}$

(d) $D := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : \ \ 0 < x < \frac{1}{3^k} \right\}$

(e) $E := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : \ \ 0 < x < \frac{1}{3^k} \right\}$

(f) $F := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : \ \ 1 - \frac{1}{k} < x < 1 + \frac{1}{k} \right\}$

(g) $G := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : \ \ 2 + \frac{1}{k} < x < 5 - \frac{1}{k} \right\}$

ÇÖZÜM 7: (a) $I_k := \left\{ x \in \mathbb{R} : \ \ \frac{1}{k+1} \leq x < \frac{1}{k} \right\}$ diyelim. I_k kümeleri Borel kümesi olduğundan λ^* Lebesgue dış ölçüsüne göre ölçülebilirdir. Lebesgue dış ölçüsüne göre ölçülebilen $A \subset \mathbb{R}$ kümelerinin sınıfı $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ ile gösterilirse λ^* Lebesgue dış ölçüsünün $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ $\sigma-$cebirine kısıtlaması ölçüdür. Bu ölçüye Lebesgue ölçüsü adı verilir. (I_k) ayrık kümelerin bir dizisi olduğundan

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 \end{aligned}$$

bulunur.

(b) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $I_k := \left\{ x \in \mathbb{R} : \ \frac{a-1}{k} < x < \frac{a+1}{k} \right\}$ olsun. Dikkat edilirse (I_k) kümelerin azalan dizisidir. Bunun yardımıyla

$$\lambda(B) = \lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda(I_k) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{a+1}{k} - \frac{a-1}{k}\right) = 0$$

gerçeklenir.

(c) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $I_k := \left\{ x \in \mathbb{R} : \ \frac{1}{2^{k+1}} \leq x < \frac{1}{2^k} \right\}$ olsun. (I_k) ayrık kümelerin dizisi olup

$$\lambda(C) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2}$$

bulunur.

(d) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $I_k := \left\{ x \in \mathbb{R} : \ 0 < x < \frac{1}{3^k} \right\}$ olsun. (I_k) kümelerin azalan dizisidir. O halde

$$\lambda(D) = \lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda(I_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3^k} = 0$$

elde edilir.

(e) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $I_k := \left\{ x \in \mathbb{R} : \ 0 < x < \frac{1}{3^k} \right\}$ olsun. (I_k) kümelerin azalan dizisi olup

$$\lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \lambda\left(\left(0, \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}$$

bulunur.

(f) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $I_k := \left\{x \in \mathbb{R} : \quad 1 - \frac{1}{k} < x < 1 + \frac{1}{k}\right\}$ olsun. (I_k) kümelerin azalan dizisidir. Buna göre

$$\lambda(F) = \lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda(I_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k} = 0$$

bulunur.

(g) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $I_k := \left\{x \in \mathbb{R} : \quad 2 + \frac{1}{k} < x < 5 - \frac{1}{k}\right\}$ kümelerini tanımlayalım. (I_k) kümelerin artan dizisidir. Böylece

$$\lambda(G) = \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \lim_{k\to\infty} \lambda(I_k) = \lim_{k\to\infty} \left(3 - \frac{2}{k}\right) = 0$$

elde edilir.

SORU 8: μ^* dönüşümü X üzerinde dış ölçü olsun. $E \subset X$ kümesi μ^* ölçülebilir ise $\forall A \subset X$ için

$$\mu^*(E \cup A) + \mu^*(E \cap A) = \mu^*(E) + \mu^*(A)$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM 8: E kümesi μ^* ölçülebilir olduğundan $\forall A \subset X$ için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*\left(A \cap E^t\right) \tag{2}$$

dır. (2) ifadesi $\forall A \subset X$ için gerçeklendiğinden $A \cup E \subset X$ için de geçerlidir.

Yani,

$$\begin{aligned}\mu^*(A\cup E) &= \mu^*((A\cup E)\cap E)+\mu^*\left((A\cup E)\cap E^t\right)\\ &= \mu^*(E)+\mu^*\left(A\cap E^t\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifade (2) ifadesinde dikkate alınırsa

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(E\cup A)-\mu^*(E)$$

istenileni elde edilir.