4. İNTEGRAL

4.1 Basit Fonksiyonların İntegrali

SORU 1: $c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\int_X c d\mu = c\mu(X)$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM 1: $A \in \mathcal{A}$ olsun. $X = A \cup A^t$ olup $c = c\chi_A + c\chi_{A^t}$ olarak yazılabilir.

$$\begin{aligned} \int_X c d\mu &= c\mu(A) + c\mu\left(A^t\right) \\ &= c\left[\mu(A) + \mu\left(A^t\right)\right] \\ &= c\mu\left(A \cup A^t\right) = c\mu(X) \end{aligned}$$

bulunur.

SORU 2: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı ve $c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\int_a^b c d\lambda = \int_{[a,b]} c d\lambda$ ifadesini hesaplayınız.

ÇÖZÜM 2: *Soru 1 dikkate alınırsa*

$$\int_a^b c d\lambda = c\lambda([a,b]) = c(b-a)$$

elde edilir.

SORU 3: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı ve

$$f(x) := \begin{cases} 2 & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ 3 & ; \quad 2 < x \leq 4 \\ 1 & ; \quad 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

olmak üzere $\int\limits_{[0,1)\cup(2,5]} f \; d\lambda$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM 3: A_k kümeleri ayrık, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = X$, $f = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ ise $\int\limits_X f \; d\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)$ olduğu bilinmektedir. $X = [0,1) \cup (2,4] \cup (4,5]$ olup

$$f = 2\chi_{[0,1)} + 3\chi_{(2,4]} + 1\chi_{(4,5]}$$

şeklinde ifade edilebilir. Yukarıda verilen bilgi ışığında

$$\begin{aligned} \int\limits_{[0,1)\cup(2,5]} f \; d\lambda &= 2\lambda([0,1)) + 3\lambda((2,4]) + 1\lambda((4,5]) \\ &= 2(1-0) + 3(4-2) + 1(5-4) \\ &= 9 \end{aligned}$$

elde edilir.

SORU 4: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı, $\varphi : [0,2] \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\varphi(x) = [|2x|]$ için

$$\int\limits_{[0,2]} \varphi \; d\lambda$$

integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM 4:

$$\varphi(x) = [|2x|] = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & ; \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 2 & ; \quad 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ 3 & ; \quad \frac{3}{2} \leq x < 2 \\ 4 & ; \quad x = 2 \end{cases}$$

ve $[0,2] = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left[1, \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right) \cup \{2\}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\varphi = 0\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right)} + 1\chi_{\left[\frac{1}{2},1\right)} + 2\chi_{\left[1,\frac{3}{2}\right)} + 3\chi_{\left[\frac{3}{2},2\right)} + 4\chi_{\{2\}}$$

olarak yazılabilir. Sayılabilir kümenin Lebesgue ölçüsü sıfır olduğundan

$$\begin{aligned} \int\limits_{[0,2]} \varphi \, d\lambda &= 0\lambda\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right) + 1\lambda\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right)\right) + 2\lambda\left(\left[1, \frac{3}{2}\right)\right) + 3\lambda\left(\left[\frac{3}{2}, 2\right)\right) + 4\lambda(\{2\}) \\ &= 3 \end{aligned}$$

elde edilir.

SORU 5: $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$ ölçü uzayı, $\varphi : \{0,1,2\} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = [|2x|]$ olmak üzere

$$\int\limits_{\{0,1,2\}} \varphi \, d\mu$$

integralini hesaplayınız. Burada μ sayma ölçüsüdür.

ÇÖZÜM 5:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = 0 \\ 2 & ; \quad x = 1 \\ 4 & ; \quad x = 2 \end{cases}$$

ve $\varphi = 0\chi_{\{0\}} + 2\chi_{\{1\}} + 4\chi_{\{2\}}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \int\limits_{\{0,1,2\}} \varphi \, d\mu &= 0\mu(\{0\}) + 2\mu(\{1\}) + 4\mu(\{2\}) \\ &= 0.1 + 2.1 + 4.1 = 6 \end{aligned}$$

bulunur.

SORU 6: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı, $f : (0,1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 2 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \cap (0,1) \\ 1 & ; \quad x \in I \cap (0,1) \end{cases}$$

olmak üzere $\int\limits_{(0,1)} f \, d\lambda$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM 6: $f = 2\chi_{\mathbb{Q}\cap(0,1)} + 1\chi_{I\cap(0,1)}$ olup

$$\int\limits_{(0,1)} f \, d\lambda = 2\lambda(\mathbb{Q} \cap (0,1)) + 1\lambda(I \cap (0,1)) \tag{1}$$

yazılabilir. $\mathbb{Q}\cap(0,1)$ kümesi sayılabilir olduğundan Lebesgue ölçüsü $\lambda(\mathbb{Q} \cap (0,1)) = 0$ dır. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \lambda((0,1)) &= \lambda([\mathbb{Q} \cap (0,1)] \cup [I \cap (0,1)]) \\ &= \lambda(\mathbb{Q} \cap (0,1)) + \lambda(I \cap (0,1)) \end{aligned}$$

eşitliğinden $\lambda(I \cap (0,1)) = 1$ elde edilir. Dolayısıyla bu ifadeler (1) ifadesinde dikkate alınırsa

$$\int\limits_{(0,1)} f \, d\lambda = 2.0 + 1.1 = 1$$

bulunur.

SORU 7: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı ve $A \in \mathcal{A}$ olsun.

(a) $\displaystyle\int\limits_A d\mu = \mu(A)$.

(b) $\forall x \in A$ için $|\varphi_n(x)| \leq K$ ise $\displaystyle\left|\int\limits_A \varphi_n \, d\mu\right| \leq K\mu(A)$.

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM 7: (a) $\displaystyle\int\limits_A d\mu = \int\limits_X \chi_A \, d\mu = 1.\mu(A) = \mu(A)$

(b) $\displaystyle\left|\int\limits_A \varphi_n \, d\mu\right| \leq \int\limits_A |\varphi_n| \, d\mu \leq \int\limits_A K d\mu = K\int\limits_A d\mu = K\mu(A)$ bulunur.