4.2. Pozitif Fonksiyonların İntegrali

SORU 1: (f_n) , $M^+(X,\mathcal{A})$ kümesinde bulunan fonksiyonların monoton artan dizisi ve $h.h.h.$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ ise

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n\ d\mu = \int\limits_X f\ d\mu$$

gerçeklenir. Gösteriniz (Bu teorem Monoton yakınsaklık teoreminde yakınsaklık yerine hemen hemen heryerde yakınsaklığın alınabileceğini göstermektedir).

ÇÖZÜM 1: Hemen hemen heryerde $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ ve (f_n) monoton artan dizi olsun.

$$A := \left\{x\in X:\ \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda $\mu(A) = 0$ dır. Dolayısıyla $(f_n\chi_{A^t})$ dizisi $f\chi_{A^t}$ fonksiyonuna yakınsak olacaktır. Diğer yandan (f_n) dizisi monoton artan olduğundan $(f_n\chi_{A^t})$ dizisi de monoton artandır. $\forall n\in\mathbb{N}$ için f_n ölçülebilir ve χ_{A^t} ölçülebilir olduğundan $(f_n\chi_{A^t})$ ölçülebilir fonksiyonların dizisidir. Ayrıca $\forall n\in\mathbb{N}$ için f_n negatif olmayan fonksiyon dizisi olduğundan $(f_n\chi_{A^t})$ negatif olmayan fonksiyon dizisidir. Sonuç olarak $f_n\chi_{A^t}\in M^+(X,\mathcal{A})$ sağlanır. Bu bilgiler yardımıyla Monoton yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n\chi_{A^t}\ d\mu = \int\limits_X f\chi_{A^t}\ d\mu \tag{1}$$

gerçeklenir.

$f = f\chi_A + f\chi_{A^t}$ olup

$$\int\limits_X f\ d\mu = \int\limits_X (f\chi_A + f\chi_{A^t})\, d\mu = \int\limits_X f\chi_A\ d\mu + \int\limits_X f\chi_{A^t}\ d\mu \tag{2}$$

sağlanır. Lebesgue integralinin tanımından

$$\int\limits_X f\chi_A\ d\mu = \int\limits_A f\ d\mu = \sup\left\{\int\limits_A \varphi\ d\mu :\quad \varphi \in S^+,\ \varphi \leq f\right\} \tag{3}$$

yazılabilir. $A_k \subset A$ ayrık kümeler, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = A$ ve $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ olmak üzere

$$\int\limits_A \varphi\ d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu\left(A_k\right) \tag{4}$$

olduğunu biliyoruz. $A_k \subset A$ olduğunda $\mu\left(A_k\right) = 0$ gerçeklenmelidir. Dolayısıyla $\int\limits_A \varphi\ d\mu = 0$ olup (12) ifadesi dikkate alınırsa $\int\limits_X f\chi_A\ d\mu = 0$ bulunur. Bulunan bu sonuç (11) ifadesinde göz önüne alındığında

$$\int\limits_X f\ d\mu = \int\limits_X f\chi_{A^t}\ d\mu \tag{5}$$

bulunur. Diğer yandan benzer düşünce ile

$$\int\limits_X f_n\ d\mu = \int\limits_X f_n\chi_{A^t}\ d\mu \tag{6}$$

elde edilebilir. (5) ve (6) ifadesi (1) ifadesinde kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\ d\mu = \int\limits_X f\ d\mu$$

istenilen sonuç elde edilir.

SORU 2: $\varphi \in S^+$ (Basit, ölçülebilir ve negatif olmayan) ve $E \in \mathcal{A}$ olmak üzere

$$\gamma(E) := \int_X \varphi \chi_E \, d\mu$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm $\mathcal{A}$ üzerinde ölçüdür. Gösteriniz.

ÇÖZÜM 2: $\gamma(E) := \int_X \varphi \chi_E \, d\mu = \int_E \varphi \, d\mu$ olduğu bilinmektedir.

(i) $\gamma(\emptyset) = \int_X \varphi \chi_\emptyset \, d\mu = \int_\emptyset \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(\emptyset) = 0.$

(ii) $\forall E \in \mathcal{A}$ için

$$\gamma(E) = \int_X \varphi \chi_E \, d\mu = \int_E \varphi \, d\mu \geq \int_E 0 \, d\mu = 0\mu(E) = 0$$

gerçeklenir.

(iii) (E_i) $\mathcal{A}$ daki ayrık kümelerin bir dizisi olsun. Beppo-Levi teoreminden

$$\begin{aligned}
\gamma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= \int_X \varphi \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} \, d\mu \\
&= \int_X \varphi \left(\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{E_i}\right) d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \varphi \chi_{E_i} \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(E_i)
\end{aligned}$$

elde edilir.

O halde γ dönüşümü $\mathcal{A}$ üzerinde ölçüdür.

SORU 3: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ olmak üzere $\int\limits_{\mathbb{N}} f \; d\mu$ integralini

(a) $\mu = \lambda$ Lebesgue ölçüsü olması durumunda

(b) μ ölçüsünün sayma ölçüsü olması durumunda

hesaplayınız.

ÇÖZÜM 3: μ ölçüsünün özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{N}} f \; d\mu &= \int\limits_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{n\}} f \; d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\{n\}} \frac{1}{x(1+x)} \; d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\{n\}} \frac{1}{n(1+n)} \; d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n)} \int\limits_{\{n\}} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n)} \mu(\{n\})
\end{aligned}$$

bulunur.

(a) $\mu = \lambda$ Lebesgue ölçüsü olması durumunda $\mu(\{n\}) = 0$ olacağından

$$\int\limits_{\mathbb{N}} f \; d\mu = 0$$

dır.

(b) μ ölçüsünün sayma ölçüsü olması durumunda ise $\mu(\{n\}) = 1$ olacağından

$$\int\limits_{\mathbb{N}} f \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n)} = 1$$

elde edilir.

SORU 4: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x)$ olsun. Bu durumda

(a) (f_n) dizisi monoton artan mıdır?

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \chi_{[0,n]} := f$ olduğunu gösteriniz.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \int\limits_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$ gerçeklenir mi?

ÇÖZÜM 4: **(a)** $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,n] \\ 0 & ; \quad x \notin [0,n] \end{cases} \quad ; \quad f_{n+1}(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,n+1] \\ 0 & ; \quad x \notin [0,n+1] \end{cases}$$

dır. Bu fonksiyonlar dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} x \in [0,n] \Longrightarrow & \quad f_n(x) = 1, \quad f_{n+1}(x) = 1 \\ x \in (n, n+1] \Longrightarrow & \quad f_n(x) = 0, \quad f_{n+1}(x) = 1 \\ x \notin (0, n+1) \Longrightarrow & \quad f_n(x) = 0 \quad f_{n+1}(x) = 0 \end{aligned}$$

olup $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ gerçeklenir. O halde (f_n) dizisi fonksiyonların monoton artan dizisidir.

(b) $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \chi_{[0,n]} = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,n] \\ 0 & ; \quad x \notin [0,n] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,\infty) \\ 0 & ; \quad x \notin [0,\infty) \end{cases} = \chi_{[0,\infty)}(x)$$

sağlanır.

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \ d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,n]}(x) \ d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda([0,n]) = +\infty$$

ve

$$\int_{\mathbb{R}} f \ d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,\infty)} \ d\lambda = \int_{[0,\infty)} d\lambda = +\infty$$

olup istenilen eşitlik sağlanır.

SORU 5: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) = \frac{n}{n+1}\chi_{\left[-\frac{n+1}{n}, \frac{n+1}{n}\right]}(x)$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \ d\lambda$$

ifadesini hesaplayınız.

ÇÖZÜM 5: $\forall n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonları basit fonksiyon olup

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & ; \quad x \in \left[-\frac{n+1}{n}, \frac{n+1}{n}\right] \\ 0 & ; \quad x \notin \left[-\frac{n+1}{n}, \frac{n+1}{n}\right] \end{cases}$$

dır. Şimdi Monoton yakınsaklık teoreminin hipotezlerini sağlatalım:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) \geq 0$.

(ii) $\left[-\frac{n+1}{n}, \frac{n+1}{n}\right]$ kümesi ölçülebilir olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonları da ölçülebilirdir.

(iii) $x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \begin{cases} \frac{n}{n+1} & ; \quad x \in \left[-\frac{n+1}{n}, \frac{n+1}{n}\right] \\ 0 & ; \quad x \notin \left[-\frac{n+1}{n}, \frac{n+1}{n}\right] \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & ; \quad x \notin [-1, 1] \end{cases} \\
&= \chi_{[-1,1]}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & ; \quad x \in \left[-\frac{n+1}{n}, \frac{n+1}{n}\right] \\ 0 & ; \quad x \notin \left[-\frac{n+1}{n}, \frac{n+1}{n}\right] \end{cases} \quad \text{ve} \quad f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{n+1}{n+2} & ; \quad x \in \left[-\frac{n+2}{n+1}, \frac{n+2}{n+1}\right] \\ 0 & ; \quad x \notin \left[-\frac{n+2}{n+1}, \frac{n+2}{n+1}\right] \end{cases}$$

olup

$$\begin{aligned}
x \in \left[-\tfrac{n+2}{n+1}, \tfrac{n+2}{n+1}\right] &\implies f_n(x) = \tfrac{n}{n+1}, \quad f_{n+1}(x) = \tfrac{n+1}{n+2} \\
x \notin \left[-\tfrac{n+1}{n}, \tfrac{n+1}{n}\right] \setminus \left[-\tfrac{n+2}{n+1}, \tfrac{n+2}{n+1}\right] &\implies f_n(x) = \tfrac{n}{n+1}, \quad f_{n+1}(x) = 0 \\
x \notin \left[-\tfrac{n+1}{n}, \tfrac{n+1}{n}\right] &\implies f_n(x) = 0, \quad f_{n+1}(x) = 0
\end{aligned}$$

ifadelerinden (f_n) dizisinin fonksiyonların monoton artan dizisi olması elde edilir.

Dolayısıyla (f_n) dizisi Monoton yakınsaklık teoreminin hipotezlerini gerçekler. Böylece

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\ d\lambda &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \frac{n}{n+1}\chi_{\left[-\frac{n+1}{n},\frac{n+1}{n}\right]}\ d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\chi_{\left[-\frac{n+1}{n},\frac{n+1}{n}\right]}\right) d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]} d\lambda = \int_{[-1,1]} d\lambda = 2
\end{aligned}$$

bulunur.

SORU 6: $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ ölçü uzayı ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $f_n(x)=\frac{1}{n}\chi_{[n,\infty)}(x)$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\ d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\lambda$$

olduğunu gösteriniz. Bu sonuç Monoton yakınsaklık teoremi ile çelişir mi? (Burada f fonksiyonu (f_n) dizisinin yakınsadığı fonksiyondur).

ÇÖZÜM 6: $\forall n\in\mathbb{N}$ için $f_n\in M^+(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\begin{cases}\frac{1}{n} & ;\quad x\in[n,\infty)\\ 0 & ;\quad x\notin[n,\infty)\end{cases} \\
&= 0 := f(x)
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu ifadeler yardımıyla

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\ d\lambda &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n}\chi_{[n,\infty)}\ d\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lambda([n,\infty)) = +\infty\end{aligned}$$

ve

$$\int_{\mathbb{R}} f\ d\lambda = \int_{\mathbb{R}} 0\ d\lambda = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\ d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\lambda$$

sağlanır. Diğer yandan $x \in [n, n+1)$ için $f_n(x) = \frac{1}{n}$, $f_{n+1}(x) = 0$ olduğundan (f_n) dizisi fonksiyonların monoton artan dizisi olamaz. Böylece elde edilen sonuç Monoton yakınsaklık teoremi ile çelişmez.

SORU 7: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x)$ ve $f = 0$ fonksiyonları veriliyor. (f_n) fonksiyon dizisinin $f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\ d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\lambda$$

mıdır?

ÇÖZÜM 7: $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x) - 0\right| \leq \frac{1}{n}$$

olup $(c_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi sıfıra yakınsayan dizi olduğundan (f_n) fonksiyon dizisi $f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Diğer yandan

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\ d\lambda &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}\ d\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lambda([0,n]) = 1\end{aligned}$$

ve

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\lambda = \int_{\mathbb{R}} 0\ d\lambda = 0$$

gerçeklenip

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\ d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\lambda$$

olduğu görülür.

SORU 8: Monoton yakınsaklık teoremini kullanarak

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx = e - 1$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM 8: $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için $(f_n(x)) = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$ olarak belirleyelim.

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için $f_n(x) > 0$ dır.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ fonksiyonları sürekli olduğundan ölçülebilirdir.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x := f(x)$.

(iv) Bernoulli eşitsizliği kullanılırsa $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} &= \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right) \\ &= \left(\frac{n^2+nx+n}{n^2+nx+n+x}\right)^{n+1}\frac{n+x}{n} \\ &= \left(1-\frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)^{n+1}\frac{n+x}{n} \\ &\geq \left(1-\frac{x}{n+x}\right)\frac{n+x}{n} = 1 \end{aligned}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ sağlanır. O halde Monoton yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^1 e^x \, dx = e-1$$

istenilen eşitlik bulunmuş olur.

SORU 9: $\alpha > 1$ için

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dx = \Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$$

olduğunu gösteriniz. Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ (Gama fonksiyonu) dır.

ÇÖZÜM 9: $\sum\limits_{k=1}^\infty u^k = \frac{u}{1-u}$ $(|u|<1)$ serisi düzgün yakınsaktır. $x \in (0,\infty)$ için $|e^{-x}| < 1$ olduğundan

$$\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{k=1}^\infty e^{-kx}$$

gerçeklenir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$s_n(x) := x^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{n} e^{-kx}; \quad \alpha > 1,\ x > 0$$

tanımlayalım. Bu durumda soruda verilen ifade

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} dx = \int_0^{\infty} \left(\lim_{n\to\infty} s_n(x) \right) dx$$

olarak yazılabilir. O halde (s_n) fonksiyon dizisine Monoton yakınsaklık teoremini uygulayalım:

(i) $\forall x \in (0,\infty)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s_n(x) > 0$ dır.

(ii) $\forall x \in (0,\infty)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için s_n fonksiyonları sürekli olduğundan s_n fonksiyonları ölçülebilirdir.

(iii) $\forall x \in (0,\infty)$ için

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s_n(x) &= \lim_{n\to\infty} x^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} \\ &= x^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx} \\ &= x^{\alpha-1} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \end{aligned}$$

gerçeklenir.

(iv) $\forall x \in (0,\infty)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$s_n(x) = x^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} \le x^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{n+1} e^{-kx} = s_{n+1}(x)$$

olup (s_n) fonksiyonların artan dizisidir.

Dolayısıyla Monoton yakınsaklık teoreminden

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dx &= \int_0^\infty \left(\lim_{n\to\infty} s_n(x)\right)dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty s_n(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(x^{\alpha-1}\sum_{k=1}^{n} e^{-kx}\right)dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-kx}dx\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-kx}dx\right) \\
&= \Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}
\end{aligned}$$

istenilen eşitlik gerçeklenmiş olur.

SORU 10: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı olsun. Aşağıda verilen fonksiyon dizileri için Fatou lemmasının geçerli olup olmadığını araştırınız.

(a) $f_n(x) = n\chi_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}(x)$

(b) $g_n(x) = \chi_{[n,n+1)}(x)$

(c) $h_n(x) = \chi_{[n,\infty)}(x)$

(d) $r_n(x) = \begin{cases} -\frac{2n-1}{n} & ; \quad a \leq x < b - \frac{1}{n} \\ 0 & ; \quad b - \frac{1}{n} \leq x < b \end{cases}$

ÇÖZÜM 10: **(a)** $f_n(x) = \begin{cases} n & ; \quad x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & ; \quad x \notin \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \end{cases}$ olup $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f_n(x) \geq 0$ ve ölçülebilirdir. Ayrıca $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ dır.

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n \; dx = \int_{\mathbb{R}} 0 \; dx = 0$$

ve

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \; dx = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n\chi_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]} \; dx = \liminf_{n\to\infty} n\lambda\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]\right) = 1$$

sağlanıp Fatou lemması gerçeklenir.

(b) $g_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [n, n+1) \\ 0 & ; \quad x \notin [n, n+1) \end{cases}$ olup $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $g_n(x) \geq 0$ ve ölçülebilirdir. $x \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ olup $\liminf\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ dır.

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} g_n \; dx = \int_{\mathbb{R}} 0 \; dx = 0$$

ve

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n \; dx = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[n,n+1)} \; dx = \liminf_{n\to\infty} \lambda([n, n+1)) = 1$$

olup Fatou lemması sağlanır.

(c) $h_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [n, \infty) \\ 0 & ; \quad x \notin [n, \infty) \end{cases}$ olup $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $h_n(x) \geq 0$ ve ölçülebilirdir. Ayrıca $x \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = 0$ olup $\liminf\limits_{n\to\infty} h_n(x) = 0$ dır.

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} h_n \; dx = \int_{\mathbb{R}} 0 \; dx = 0$$

ve

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} h_n \, dx = \liminf_{n\to\infty}\int_{[n,\infty)} dx = \infty$$

eşitlikleri dikkate alınırsa Fatou lemmasının gerçeklendiği görülür.

(d) $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \left[b - \frac{1}{n}, b\right)$ için $r_n(x) < 0$ olduğundan Fatou lemması geçerli değildir.

SORU 11: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı ve (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsayan, pozitif, ölçülebilir fonksiyonların dizisi olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n \leq f$ ise

$$\int_X f \, d\mu = \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n \, d\mu$$

gerçeklenir. Gösteriniz.

ÇÖZÜM 11: Fatou lemmasından

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n \, d\mu$$

gerçeklenir. $f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ olduğundan $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = f$ dir. Bu durumda

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n \, d\mu \tag{7}$$

sağlanır. f_n, f fonksiyonları pozitif ölçülebilir fonksiyonlar ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n \leq f$ olduğundan

$$\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \Longrightarrow \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \tag{8}$$

bulunur. (7) ve (8) ifadesinden istenilen eşitlik bulunur.

SORU 12: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı, $h \in M^{+}(X, \mathcal{A})$ ve $\int\limits_X h \, d\mu < \infty$ olsun. Eğer (f_n) dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $-h \leq f_n$ olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonların dizisi ise

$$\int\limits_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM 12: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $-h \leq f_n$ olduğundan $g_n = f_n + h$ ile tanımlı (g_n) dizisi pozitif ölçülebilir fonksiyonların dizisidir. Dolayısıyla (g_n) dizisine Fatou lemması uygulanabilir.

$$\begin{aligned}
\int\limits_X \liminf_{n\to\infty} (f_n + h) \, d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X (f_n + h) \, d\mu \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left[\int\limits_X f_n \, d\mu + \int\limits_X h \, d\mu \right] \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu + \int\limits_X h \, d\mu \qquad (9)
\end{aligned}$$

(9) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\int\limits_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n + h \right) d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu + \int\limits_X h \, d\mu \\
\int\limits_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu + \int\limits_X h \, d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\mu + \int\limits_X h \, d\mu
\end{aligned}$$

elde edilir. $\int\limits_X h \, d\mu < \infty$ olduğundan istenilen eşitsizlik gerçeklenir.