## 4.3. İntegrallenebilen Fonksiyonlar

**SORU 1:** $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$ ölçü uzayı ve $\mu$ sayma ölçüsü olsun.

$$f \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$$

önermesinin doğru olduğunu gösteriniz. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{N}} f \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

dır.

**ÇÖZÜM 1:** $\mu$ sayma ölçüsünün özelliğinden

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} |f| \; d\mu &= \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}} |f| \; d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{n\}} |f| \; d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| \int_{\{n\}} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| \, \mu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|
\end{aligned}$$

eşitliği gerçeklenir. Bu eşitlikten $f \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$ önermesinin doğru olduğu görülür. Yukarıda yapılan işlemler $|f|$ yerine $f$ alınması ile tekrardan yapılırsa

$$\int_{\mathbb{N}} f \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

elde edilir.

**SORU 2:** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı, $f \in \mathcal{L}$, $\mu(E) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\int_E f \ d\mu = 0$$

olduğunu gösteriniz.

**ÇÖZÜM 2:**

$$f\chi_E = \begin{cases} f & ; \quad x \in E \\ 0 & ; \quad x \notin E \end{cases}$$

olup $\mu(E) = 0$ olduğundan hemen hemen heryerde $f\chi_E = 0$ dır. Bu durumda

$$\int_X 0 \ d\mu = \int_X f\chi_E \ d\mu$$

gerçeklenir. Bu ifade ise

$$\int_E f \ d\mu = \int_X f\chi_E \ d\mu = 0$$

olmasını gerektirir.

**SORU 3:** $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı

$$f(x) := \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ x^3 - 2 & ; \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

olmak üzere $\int\limits_{[0,1]} f \ d\lambda$ integralini hasaplayınız.

**ÇÖZÜM 3:** $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ olduğundan hemen hemen heryerde $f(x) = x^3 - 2$ dir.

$$g : \underset{x \longrightarrow g(x) = x^3 - 2}{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\int_{[0,1]} f \ d\lambda = \int_{[0,1]} g \ d\lambda$$

sağlanır. $g$ fonksiyonu Riemann anlamında integrallenebilir olduğundan Lebesgue anlamında da integrallenebilirdir ve bu iki integral değerleri birbirine eşittir. Dolayısıyla

$$\int_{[0,1]} f \ d\lambda = \int_{[0,1]} g \ d\lambda = \int_0^1 \left(x^3 - 2\right) dx = -\frac{7}{4}$$

bulunur.

**SORU 4:** $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı

$$f(x) := \begin{cases} e^x & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & ; \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

olmak üzere $\int_{[0,1]} f \ d\lambda$ integralini hasaplayınız.

**ÇÖZÜM 4:**

$$g : \underset{x \longrightarrow g(x) = x^3}{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}$$

olarak tanımlayalım. $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ olduğundan hemen hemen heryerde $f = g$ dir. Bu durumda

$$\int_{[0,1]} f \ d\lambda = \int_{[0,1]} g \ d\lambda$$

sağlanır. $g(x) = x^3$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilir olduğundan Lebesgue anlamında da integrallenebilir olup bu integraller birbirlerine eşittir. Dolayısıyla

$$\int\limits_{[0,1]} f \ d\lambda = \int\limits_{[0,1]} g \ d\lambda = \int\limits_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

bulunur.

**SORU 5:** $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı ve $f : [0,1] \to \bar{\mathbb{R}}$

$$f(x) := \begin{cases} +\infty & ; \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

olmak üzere $\int\limits_{[0,1]} f \ d\lambda$ integralini hesaplayınız.

**ÇÖZÜM 5:** Hatırlatacak olursak "$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı, $f : X \to [-\infty, +\infty]$ olsun. $f \in \mathcal{L} \Longrightarrow H.h.h.\ x \in X$ için $|f(x)| < \infty$." önermesi doğrudur. Soruya dönecek olursak $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ olduğundan $h.h.h.\ x \in [0,1]$ için $f(x) = +\infty$ dur. O halde hatırlatmadan $f \notin \mathcal{L}$ dir.

**SORU 6:** $f \in \mathcal{L}$ ve $g$ fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir fonksiyon ise $fg \in \mathcal{L}$ olduğunu gösteriniz.

**ÇÖZÜM 6:** $\forall x \in X$ için $|g(x)| \leq K$ olacak şekilde $K > 0$ vardır. $f \in \mathcal{L}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\int\limits_X |fg| \ d\mu = \int\limits_X |f| \ |g| \, d\mu \leq \int\limits_X K \, |f| \ d\mu = K \int\limits_X |f| \ d\mu < \infty$$

elde edilir. Böylece $fg \in \mathcal{L}$ sağlanır.

**SORU 7:** $(X,\mathcal{A},\mu)$ ölçü uzayı, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $f_n\in\mathcal{L}$ olsun. $(f_n)$ dizisi $f$ fonksiyonuna yakınsak ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n-f|\ d\mu=0$$

ise $\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n|\ d\mu=\int_X |f|\ d\mu$ olduğunu gösteriniz.

**ÇÖZÜM 7:** $\forall n\in\mathbb{N}$ için $f_n\in\mathcal{L}$ olduğu dikkate alınırsa

$$0=\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n-f|\ d\mu\geq\lim_{n\to\infty}\int_X ||f_n|-|f||\ d\mu\geq\lim_{n\to\infty}\left|\int_X (|f_n|-|f|)\ d\mu\right|\geq 0$$

gerçeklenir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_X |f_n|\ d\mu-\int_X |f|\ d\mu\right|=0$$

olup istenilen ifade elde edilir.

**SORU 8:** Lebesgue yakınsaklık teoremini kullanarak

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}dx$$

ifadesini hesaplayınız.

**ÇÖZÜM 8:** $\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\forall x\in[0,1]$ için $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}$ olsun. Şimdi Lebesgue yakınsaklık teoreminin hipotezlerini sağlatalım:

$(i)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\forall x\in[0,1]$ için $f_n$ fonksiyonları sürekli olduğundan $f_n$ fonksiyonları ölçülebilirdir.

$(ii)$ $\forall x \in [0,1]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} = e^{-x}$ dir.

$(iii)$ $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonu sürekli olduğundan ölçülebilirdir.

$(iv)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$|f_n(x)| = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \leq 1 = g(x)$$

olup $\int\limits_0^1 g(x)\, dx < \infty$ sağlanır.

Dolayısıyla Lebesgue yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} dx = \int\limits_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e}$$

elde edilir.

**SORU 9:** Lebesgue yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{n} dx = 0$$

olduğunu gösteriniz.

**ÇÖZÜM 9:** $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [1,\infty)$ için $f_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{n}$ olsun.

$(i)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [1,\infty)$ için $f_n$ fonksiyonları sürekli olduğundan $f_n$ fonksiyonları ölçülebilirdir.

$(ii)$ $\forall x \in [1,\infty)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{n} = 0$ olur.

$(iii)$ $f(x) = 0$ sabit fonksiyon olduğundan ölçülebilirdir.

$(iv)$ $\forall x \in [1, \infty)$ için $x \leq e^x$ eşitsizliği dikkate alındığında

$$|f_n(x)| = \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{n} \leq \frac{n}{nx^2} = \frac{1}{x^2} = g(x)$$

olup $\int\limits_1^\infty g(x)\,dx = \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty$ gerçeklenir.

O halde Lebesgue yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{n} dx = \int\limits_1^\infty 0dx = 0$$

elde edilir.

**SORU 10:** Lebesgue yakınsaklık teoremi yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

ifadesini hesaplayınız.

**ÇÖZÜM 10:** $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0, 1]$ için $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ olarak tanımlayalım.

$(i)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0, 1]$ için $f_n$ fonksiyonları sürekli olduğundan $f_n$ fonksiyonları ölçülebilirdir.

$(ii)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 \;\; ; & x = 0 \\ 0 \;\; ; & x \in (0, 1] \end{cases}$$

olup $(f_n)$ dizisi $f = 0$ fonksiyonuna hemen hemen heryerde yakınsaktır.

$(iii)$ $f$ fonksiyonu sabit fonksiyon olup ölçülebilirdir.

$(iv)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için

$$|f_n(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq 1 = g(x)$$

olup $\int_0^1 g(x)\, dx < \infty$ dur.

Dolayısıyla Lebesgue yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

elde edilir.

**SORU 11:** Lebesgue yakınsaklık teoreminden faydalanarak

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n+1}{x^n+2} dx = \frac{1}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

**ÇÖZÜM 11:** $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için $f_n(x) = \frac{x^n+1}{x^n+2}$ olsun.

$(i)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için $f_n$ fonksiyonları sürekli olduğundan $f_n$ fonksiyonları ölçülebilirdir.

$(ii)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n+1}{x^n+2} = \begin{cases} \frac{2}{3} & ; \quad x = 1 \\ \frac{1}{2} & ; \quad x \in [0,1) \end{cases}$$

olup $(f_n)$ dizisi $f(x) = \frac{1}{2}$ fonksiyonuna hemen hemen heryerde yakınsaktır.

$(iii)$ $f(x) = \frac{1}{2}$ sabit fonksiyon olup ölçülebilirdir.

$(iv)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için

$$|f_n(x)| = 1 - \frac{1}{x^n + 2} < 1 = g(x)$$

olup $\int_0^1 g(x)\, dx < \infty$ sağlanır.

O halde Lebesgue yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n + 1}{x^n + 2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}$$

olduğu görülür.

**SORU 12:** Lebesgue yakınsaklık teoremini kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{\frac{3}{2}} x}{1 + n^3 x^3} dx = 0$$

olduğunu gösteriniz.

**ÇÖZÜM 12:** $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için $f_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}} x}{1+n^3 x^3}$ olarak tanımlayalım.

$(i)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için $f_n$ fonksiyonları sürekli olduğundan $f_n$ fonksiyonları ölçülebilirdir.

$(ii)$ $\forall x \in [0,1]$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$ dir.

$(iii)$ $f(x) = 0$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

$(iv)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \le g(x)$ olacak şekilde $g \in \mathcal{L}$ var mıdır? Böyle bir $g$ fonksiyonunun varlığını türev yardımıyla bulalım:

$$t \in \mathbb{R} \text{ için } f_t(x) = \frac{t^{\frac{3}{2}}x}{1+t^3x^3}$$

ile tanımlayalım.

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(x) = \frac{\frac{3}{2}\left(\sqrt{t}x - t^{\frac{7}{2}}x^4\right)}{\left(1+t^3x^3\right)^2}$$

olup $t = 0$ ve $t = \frac{1}{x}$ kritik noktalardır. $f_{\frac{1}{x}}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f_0(x) = 0$ değerleri bulunur. Dolayısıyla $\forall t \in \mathbb{R}$ için $|f_t(x)| \le \frac{1}{2\sqrt{x}} = g(x)$ gerçeklenmelidir. Bundan dolayı $\forall n \in \mathbb{N}$ için de $|f_n(x)| \le \frac{1}{2\sqrt{x}} = g(x)$ sağlanır. Ayrıca $\int\limits_0^1 g(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx < \infty$ olup $g \in \mathcal{L}$ dir.

Lebesgue yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{n^{\frac{3}{2}}x}{1+n^3x^3}dx = \int\limits_0^1 0dx = 0$$

bulunur.

**SORU 13:** Lebesgue yakınsaklık teoremini kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^2 \frac{x^n}{1+x^n}dx = 1$$

olduğunu gösteriniz.

**ÇÖZÜM 13:** $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,2]$ için $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ olsun.

$(i)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,2]$ için $f_n$ fonksiyonları sürekli olduğundan $f_n$ fonksiyonları ölçülebilirdir.

$(ii)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & ; \quad x = 1 \\ 1 & ; \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

olduğu dikkate alındığında hemen hemen her $x \in [0,1]$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f$, hemen hemen her $x \in [1,2]$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 = \widetilde{f}$ sağlanır.

$(iii)$ $f$ ve $\widetilde{f}$ fonksiyonları sabit fonksiyon olduğundan ölçülebilirdir.

$(iv)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,2]$ için

$$|f_n(x)| = \frac{x^n}{1+x^n} < 1 = g(x)$$

olup $\int_0^2 g(x)\,dx < \infty$ sağlanır.

Dolayısıyla Lebesgue yakınsaklık teoreminden

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^2 \frac{x^n}{1+x^n} dx &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx + \int_1^2 \frac{x^n}{1+x^n} dx \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx + \lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{x^n}{1+x^n} dx \\ &= \int_0^1 0dx + \int_1^2 1dx = 1 \end{aligned}$$

istenilen elde edilir.