### 4.4. Lebesgue İntegrali ve Riemann İntegrali Arasındaki İlişki

**SORU 1:** $C$ Cantor kümesi olsun. Bu durumda $\chi_C$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilirdir ve

$$\int_0^1 \chi_C dx = 0$$

olduğunu gösteriniz.

**ÇÖZÜM 1:** Bilinmektedir ki $\chi_C$ fonksiyonu $[0,1] \setminus C$ kümesinin tüm noktalarında sürekli, $C$ kümesinin tüm noktalarında süreksizdir. $\lambda(C) = 0$ olduğundan $\chi_C$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilirdir. Hemen hemen heryerde $\chi_C = 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$\int_0^1 \chi_C dx = \int_{[0,1]} \chi_C d\lambda = 0$$

elde edilir.

**SORU 2:** $f : [0,1] \to [0,\infty)$ ile tanımlı fonksiyon $(0,1]$ aralığının tüm kapalı alt aralıklarında Riemann anlamında integrallenebilen fonksiyon olsun. $f$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1} f(x)\, dx$$

ifadesinin mevcut olmasıdır ve ayrıca,

$$\int\limits_{[0,1]} f d\lambda = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\epsilon}^{1} f(x)\, dx$$

dır. Gösteriniz.

**ÇÖZÜM 2:** ($\Longrightarrow$) Kabul edelim ki $f$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. Ayrıca $(0,1]$ aralığının elemanlarından oluşan $(\epsilon_n)$, $(\epsilon_n \to 0)$ dizisini dikkate alalım. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $g_n = f\chi_{[\epsilon_n,1]}$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda hemen hemen heryerde $g_n \nearrow f$ sağlanır. Dolayısıyla

$$\int\limits_{[0,1]} f d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{[0,1]} g_n d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\epsilon_n}^{1} f(x)\, dx$$

elde edilir. Bu ise $\lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\epsilon}^{1} f(x)\, dx$ ifadesinin mevcut ve

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\epsilon}^{1} f(x)\, dx = \int\limits_{[0,1]} f d\lambda$$

olmasını gerektirir.

($\Longleftarrow$) $\lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\epsilon}^{1} f(x)\, dx$ ifadesi mevcut olsun. $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ olmak üzere $(g_n)$ dizisi yukarıdaki gibi tanımlansın. Bu durumda hemen hemen heryerde $g_n \nearrow f$ ve

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{[0,1]} g_n d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\epsilon_n}^{1} f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\epsilon}^{1} f(x)\, dx < \infty$$

sağlanır. Dolayısıyla $f$ bir üst fonksiyon olup Lebesgue integrallenebilirdir.

**SORU 3:** $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} x^p & ; \quad x \in (0,1] \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlı fonksiyonun Lebesgue integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $p > -1$ olmasıdır. Ayrıca, $f$ Lebesgue integrallenebilir ise

$$\int_{[0,1]} f d\lambda = \frac{1}{1+p}$$

gerçeklenir. Gösteriniz.

**ÇÖZÜM 3:** $0 < \epsilon < 1$ olmak üzere açık olarak

$$\int_{\epsilon}^{1} x^p dx = \begin{cases} \frac{1-\epsilon^{p+1}}{p+1} & ; \quad p \neq -1 \\ -\ln \epsilon & ; \quad p = -1 \end{cases}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1} x^p dx$ ifadesinin mevcut olması için gerek ve yeter şart $p > -1$ olup bu durumda limit değeri $\frac{1}{1+p}$ dir. Sonuç olarak Soru 2 dikkate alınırsa istenilen elde edilir.